

# 第3章 敘述統計(II) — 統計量數

## 習題

### 1. 觀念題

- 依皮爾森經驗法則，知  $\bar{x}$  約為 4.5，且資料分配呈左偏。
- 枝葉圖除了具有直方圖的功用外，尚可看出實際的觀察值，可提供更多的資訊。
- 計算  $Z$  分數，得  $Z$  (期中) = 1.081， $Z$  (期末) = -0.27，故期末考成績退步了。
- Chebyshev 定理：
  - 限制：只能說出「多少比例以上」。
  - 用途：可適用於任何形狀的資料分配。經驗法則：
  - 限制：只適用於對稱分配的資料。
  - 用途：可較具體告訴我們「約有多少比例」的訊息。
- 請參閱第 3.5 節。
- 單位不同的資料。
  - 單位相同但平均數相差很大的資料。
- 中位數為 44 分，表示有 500 名學生之英文成績低於 44 分。而平均成績 45.5 分比 44 分高，故另 500 名高於 44 分的學生中必有成績較高者。

8. 統計學標準差(8)與經濟學標準差(7.5)非常接近，故兩科分數的離散程度(或分布狀況)大致一樣。但統計學平均成績(78)高於經濟學平均成績(72)，大致而言，顯示該班統計學較佳。
9. 對稱分配。
10. 該生之平均成績為：
- $$\sqrt{\frac{38025}{5} - 13.5^2} = \sqrt{7605 - 182.25} = 86 \text{ (分)}$$
11. 從甲與乙所測得之資料，我們可知眾數 = 5，又已知資料呈右偏分配，因此得知平均數大於眾數及中位數，且中位數亦大於眾數；因此可知平均數 = 10.7，中位數 = 6.3。
12. (a) 否；該組資料為正數時，其所得之統計量數，絕不可能產生負值。
- (b) 是。
- (c) 否；在對稱分配時會產生三點合一之圖形，則是平均數、眾數、中位數皆相等。
- (d) 是。
- (e) 否；設資料組合為：-5, 0, 0, 1, 1, 5，則該組資料的全距 = 10，中位數 = 眾數 = 平均數 = 0，但當該組資料呈倍數成長時，得 -20, 0, 0, 4, 4, 20，其全距 = 40，中位數 = 眾數 = 平均數 = 0。
- (f) 否；設兩組資料的平均數皆為正數，且甲組的平均數小於等於乙組的平均數，那麼當甲組的變異數大於乙組時，甲組的變異係數必大於乙組。
- (g) 是；設一組資料為：5, 9, 9, 13 資料組為單峰對稱分配，其算術平均數 = 9，而幾何平均數 = 8.52，由此可知算術平均數必大於幾何平均數。

## 2. 計算與應用題

$$1. (a) \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i}{n} = \frac{1}{5}(4 + 7 + 3 + 6 + 9) = 5.8$$

由小到大排列為：3, 4, 6, 7, 9

$n = 5$  為奇數，第  $\frac{5+1}{2} = 3$  位置之數值：6 為中位數，該組資料中各數皆僅出現一次，故眾數不存在。

$$(b) \bar{x} = \frac{1}{6}(24 + 28 + 36 + 30 + 24 + 29) = 28.5$$

由小到大排列為：24, 24, 28, 29, 30, 36

$n = 6$  為偶數第  $\frac{6}{2} = 3$  與第 4 位數值平均數  $\frac{28 + 29}{2} (= 28.5)$  為中位數

該組資料中 24 出現 2 次最多，故眾數為 24。

$$(c) \bar{x} = \frac{1}{7}(-2 + 1 - 1 + 0 + 3 - 2 + 1) = 0$$

資料由小至大為：-2, -2, -1, 0, 1, 1, 3

$n = 7$  為奇數

故第  $\frac{7+1}{2} = 4$  位數值 (= 0) 為中位數。

該資料中 -2 與 1 均出現 2 次，故眾數為：-2 與 1。

$$2. (a) \bar{x} = 60.36, S = 18.61$$

$$(b) \text{中位數} = 62, Q_1 = 46, Q_3 = 75$$

$$(c) P_{35} = 53; P_{40} = \frac{55 + 56}{2} = 55.5$$

$$(d) k = \frac{45}{50} \times 100 = 90 \Rightarrow \text{第90個百分位數}$$

檢驗

$\frac{k}{88}$	$\frac{i = \frac{n}{100} \times k}{44}$	$\frac{P_k}{(82 + 83)/2} = 82.5$
89	44.5	83
90	45	$(83 + 85)/2 = 84$

$$(e) \alpha = 4\%$$

表示截掉左右兩端各二個 ( $50 \times 4\% = 2$ )，即截掉 22, 25, 92, 96

$$\therefore \bar{X}_{0.04} = 60.5$$

3. 全部學生的總平均成績：

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + n_3 \bar{x}_3 + n_4 \bar{x}_4 + n_5 \bar{x}_5}{\sum_{i=1}^5 n_i}$$

$$\left( \begin{array}{l} \frac{\sum_{i=1}^5 n_i \bar{x}_i}{5} \\ \text{or} \\ \frac{\sum_{i=1}^5 n_i}{5} \end{array} \right) = \frac{15629.94}{213} = 73.38$$

4. 該資料由小至大為：

1, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9

(a) 最大值 = 9

(b) 最小值 = 1

$$(c) i = 9 \times \frac{1}{4} = 2.25$$

$Q_1 =$  第3位數值 = 4

(d)  $n = 4$  為奇數

中位數為第  $\frac{9+1}{2} = 5$  位數值 = 5

$$(e) i = 9 \times \frac{3}{4} = 6.75$$

$$Q_3 = \text{第7位數值} = 7$$

$$(f) \text{平均數} = \frac{1}{9}(1 + 3 + 4 + 5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \frac{48}{9} = 5.3333$$

$$(g) \text{全距} = \text{最大值} - \text{最小值} = 9 - 1 = 8$$

$$(h) \text{四分位距} = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$$

$$(i) MAD = \frac{\sum_{i=1}^9 |x_i - \bar{x}|}{9} = \frac{17.3333}{9} = 1.9256$$

$$(j) \text{變異數} = \frac{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n} = \frac{306 - 255.9680}{9} = 5.5591$$

$$(k) \text{標準差} = \sqrt{\text{變異數}} = 2.3578$$

$$(l) \text{變異係數} = \frac{\text{標準差}}{\text{平均數}} \times 100\% = 0.4421 \times 100\% = 44.2\%$$

$$5. n = 25 \quad \bar{x} = 165.3 \quad S = 7.1$$

令  $\bar{x}'$  表 24 名男生之平均身高

令  $S'$  表 24 名男生之標準差

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i}{n} = \frac{145.2 + 24 \times \bar{x}'}{25} = 165.3$$

$$\bar{x}' = \frac{25 \times 165.3 - 145.2}{24} = 166.1375$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 25 \cdot \bar{x}^2}{25} = 50.41 \Rightarrow \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 684362.5$$

$$S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^{24} x_i'^2 - 24 \cdot \bar{x}'^2}{24}$$

$$\sum_{i=1}^{24} x_i^2 = \sum_{i=1}^{25} x_i^2 - 145.2^2 = 684362.5 - 21083.04 = 663279.46$$

$$\therefore S'^2 = \frac{663279.46 - 662440.0538}{24} = 34.9753$$

6. 設  $\bar{x}_A$  表 A 組平均成績 (= 80)

$\bar{x}_B$  表 B 組平均成績 (= 74)

$\bar{x}$  表全班平均成績

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50} = \frac{30 \cdot \bar{x}_A + 20 \cdot \bar{x}_B}{50} = 77.6$$

設  $S_A$  表 A 組標準差 (= 6)

$S_B$  表 B 組標準差 (= 8)

$S$  表全班標準差

$$S_A^2 = 36 = \frac{\sum_{i=1}^{30} x_{A_i}^2 - 30 \cdot \bar{x}_A^2}{30} \Rightarrow \sum_{i=1}^{30} x_{A_i}^2 = 193080$$

$$S_B^2 = 64 = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_{B_i}^2 - 20 \cdot \bar{x}_B^2}{20} \Rightarrow \sum_{i=1}^{20} x_{B_i}^2 = 110800$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{50} x_i^2 - 50\bar{x}^2}{50}, \text{ 其中 } \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = \sum_{i=1}^{30} x_{A_i}^2 + \sum_{i=1}^{20} x_{B_i}^2$$

$$= \frac{303880 - 301088}{50} = 55.84$$

$$\therefore S = \sqrt{55.84} = 7.4726$$

$$7. \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 15.5$$

$$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{2551 - 2402.5}{10-1} = 16.5$$

$$8. \bar{x} = 60.36, S = 18.61$$

$$(a) \bar{x} \pm 2S \Rightarrow (23.14, 97.58)$$

落於此區間的觀測值之百分比為  $\frac{49}{50} = 98\%$

依據 Chebyshev's 定理，至少有 75% 落於  $\bar{x} \pm 2S$  區間內，因此，實際的比例符合 Chebyshev 定理的說法。

(b) 依據經驗法則，約有 95% 落於  $\bar{x} \pm 2S$  區間內，因此，實際的比例亦頗符合經驗法則。

$$9. (a) n = 1080$$

平均 IQ = 120      標準差 = 8

$$\frac{810}{1080} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

由 Chebyshev's 定理知至少 810 個學生 IQ 會落入

$$(\bar{x} \pm 2S) = (120 \pm 16) = (104, 136)$$

$$\frac{120}{1080} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$$

$\therefore$  在  $(-\infty, \bar{x} - 3S)$  與  $(\bar{x} + 3S, \infty)$  內最多包含 120 個學生的 IQ 分數  $\Rightarrow (-\infty, 96)$  與  $(144, \infty)$  內至多含 120 個學生 IQ

(b) 設學生 IQ 呈鐘形分配則

約有 95% 的 IQ 值會落入 (104, 136) 內

約有  $1 - 99.7\% = 0.3\%$  的 IQ 值落入  $(-\infty, 96) \cup (144, \infty)$  內  
即：

約  $1080 \times 95\% = 1026$  學生 IQ 在 (104, 136) 之間

$1080 \times 0.3\% = 3$  學生 IQ 在  $(-\infty, 96) \cup (144, \infty)$  內

10.  $n = 1100$

$$\begin{array}{c} \times \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \times \\ \hline 135 \qquad \qquad \qquad 175 \qquad \qquad \qquad 215 = 175 + 4 \times 10 \end{array}$$

$\therefore 215 = 175 + 4 \times 10$  且  $215 = (-\infty, 135) \cup (215, \infty)$

由 Chebyshev's 定理知，最多  $\frac{1}{4^2}$  的報考人分數會落入  $(-\infty, 135) \cup (215, \infty)$

$1100 \times \frac{1}{16} = 68.75 \Rightarrow$  最多 68 人高於 215 分（即該考生成績）

$\therefore$  該生會考取

11. (a) 資料由小至大排列：

$$5, 7, 8, 9, 9, 10 \qquad \bar{x} = 8$$

$$c = 4 \Rightarrow \text{新資料為：} 9, 11, 12, 13, 13, 14$$

$$\bar{x}' = 12 = 4 + 8 \text{——新資料平均數}$$

$$k = 2 \Rightarrow \text{新資料為：} 10, 14, 16, 18, 18, 20$$

$$\bar{x}'' = 2 \times 8 = 16$$

(b) 資料中位數為第  $\frac{6}{2}$  和  $\frac{6+2}{2}$  位數值之平均數即：

$$\frac{8+9}{2} = 8.5$$

$c = 4$  時，新資料：9, 11, 12, 13, 13, 14 之中位數仍為第 3 及第 4 位數值之平均數（ $\because$  資料個數不變）

$$\text{即 } \frac{12+13}{2} = 12.5 = 4 + \text{原來的中位數 } (8.5)$$

$k = 2$  時，新資料：10, 14, 16, 18, 18, 20 之中位數亦為第 3、4 位數值之平均數，即  $\frac{16+18}{2} = 17 = 2 \times 8.5$  原資料之眾數為：9

$$c = 4 \text{ 時，眾數} = 13 = 4 + \text{原來資料的眾數}$$

$$k = 2 \text{ 時，眾數} = 18 = 2 \times \text{原來資料的眾數}$$



$$12. \text{ 原來資料的平均數} = \frac{1}{6}(5 + 9 + 9 + 8 + 10 + 7) = 8$$

$$\begin{aligned} \text{原來資料的變異數} &= \frac{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n - 1} \\ &= \frac{400 - 384}{5} = 3.2 \quad (\text{若為樣本資料}) \end{aligned}$$

$$\text{原來資料的標準差} = \sqrt{3.2} = 1.7889$$

$c = 4$  新資料為：9, 13, 13, 12, 14, 11

新資料的平均數 = 12

$$\text{新資料的變異數} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1} = \frac{880 - 6 \times 12^2}{5} = 3.2$$

新資料的標準差 = 1.7889

$k = 2$  新資料為：10, 18, 18, 16, 20, 14

新資料的平均數 = 16

$$\begin{aligned} \text{新資料的變異數} &= \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1} = \frac{1600 - 6 \times 16^2}{5} = 12.8 \\ &= k^2 \times \text{原來資料的變異數} \end{aligned}$$

新資料的標準差 =  $\sqrt{12.8} = 3.5778$

=  $|k| \times$  原來資料的標準差

13.

組界	次數 ( $f_i$ )	組中點 ( $x_i$ )	$f_i \times x_i$	累積次數
0-5	7	2.5	17.5	7
5-10	7	7.5	52.5	14
10-15	6	12.5	75	20
15-20	9	17.5	157.5	29
20-25	6	22.5	135	35
總計	35		437.5	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{n} = \frac{437.5}{35} = 12.5$$

中位數為第  $\frac{n}{2}$  項的數值

$$\frac{35}{2} = 17.5 > 14 \text{ (累積次數)} \Rightarrow \text{中位數在 } 10 \sim 15 \text{ 中}$$

$$\text{中位數} = 10 + \frac{17.5 - 14}{6} \times (15 - 10) = 12.9167$$

$\therefore 15 \sim 20$  組中，組次數 = 9 大於其他組次數或該組即眾數組

(a) 金氏法：

$$\begin{aligned} \text{眾數} &= \text{眾數組下組界} + \text{組距} \times \frac{\text{後組次數}}{\text{前組次數} + \text{後組次數}} \\ &= 15 + (20 - 15) \times \frac{6}{6 + 6} = 17.5 \end{aligned}$$

(b) 克氏法：

$$\begin{aligned} \text{眾數} &= \text{眾數組下組界} + \text{組距} \times \frac{\text{組次數} - \text{前組次數}}{2 \times \text{組次數} - \text{前組次數} - \text{後組次數}} \\ &= 15 + (20 - 15) \times \frac{9 - 6}{2 \times 9 - 6 - 6} = 17.5 \end{aligned}$$

(c) 皮爾森法：

$$\begin{aligned} \text{眾數} &\approx \bar{x} - 3(\bar{x} - \text{中位數}) = 12.5 - 3(12.5 - 12.9167) \\ &= 13.7501 \end{aligned}$$

$$14. (a) \text{ 變異數} = \frac{\sum x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}{n - 1} = \frac{7168.75 - 5468.75}{34} = 50$$

$$\text{標準差} = \sqrt{50} = 7.0711$$

$$\begin{aligned} (b) \text{ 變異係數} &= \frac{\text{標準差}}{\text{平均數}} \times 100\% = \frac{7.0711}{12.5} \times 100\% \\ &= 56.5688\% \end{aligned}$$

(c) 四分位距 =  $Q_3 - Q_1$

$$i = 35 \times \frac{3}{4} = 26.25 > 20 \text{ (累積次數)}$$

$$Q_3 = 15 + \frac{26.25 - 20}{9} \times (20 - 15) = 18.4722$$

$$i = 35 \times \frac{1}{4} = 8.75 > 7 \text{ (第 1 組累積次數)}$$

$$Q_1 = 5 + \frac{8.75 - 7}{7} \times (10 - 5) = 6.25$$

$$\text{四分位距} = 18.4722 - 6.25 = 12.2222$$

15.

汽油	組界	組中點 ( $x_i$ )	次數 ( $f_i$ )	$f_i x_i$	累積次數	$f_i x_i^2$
0-4	-0.5-4.5	2	74	148	74	296
5-9	4.5-9.5	7	192	1344	266	9408
10-14	9.5-14.5	12	280	3360	546	40320
15-19	14.5-19.5	17	105	1785	651	30345
20-24	19.5-24.5	22	23	506	674	11132
25-29	24.5-29.5	27	6	162	680	4374
總計			680	7305		95875

$$(a) \text{ 平均數 } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 f_i x_i}{n} = \frac{7305}{680} = 10.7426$$

$$(b) \text{ 變異數 } = \frac{\sum f_i x_i^2 - n \bar{x}^2}{n - 1} = \frac{95875 - 78474.3492}{679} = 25.6269$$

(c)  $i = 680 \times \frac{3}{4} = 510 > 266$  (第 2 組累積次數)

$$Q_3 = 9.5 + \frac{510 - 266}{280} \times (14.5 - 9.5) = 13.8571$$

$$i = 680 \times \frac{1}{4} = 170 > 74$$

$$Q_1 = 4.5 + \frac{170 - 74}{192} \times (9.5 - 4.5) = 7$$

$$\text{四分位距} = 13.8571 - 7 = 6.8571$$

$$(d) i = 680 \times \frac{35}{100} = 238 > 74 \text{ (第 1 組累積次數)}$$

$$P_{35} = 4.5 + \frac{238 - 74}{192} \times (9.5 - 4.5) = 8.7708$$

(e) 眾數組為 9.5~14.5

① 金氏法：

$$\begin{aligned} \text{眾數} &= \text{眾數組下組界} + \text{組距} \times \frac{\text{後組次數}}{\text{前組次數} + \text{後組次數}} \\ &= 9.5 + (14.5 - 9.5) \frac{105}{192 + 105} = 11.2677 \end{aligned}$$

② 克氏法：

$$\begin{aligned} \text{眾數} &= \text{眾數組下組界} + \text{組距} \\ &\quad \times \frac{\text{組次數} - \text{前組次數}}{2 \times \text{組次數} - \text{前組次數} - \text{後組次數}} \\ &= 9.5 + (14.5 - 9.5) \frac{280 - 192}{560 - 192 - 105} = 11.1730 \end{aligned}$$

③ 皮爾森法：

$$\text{眾數} \approx \bar{x} - 3 (\bar{x} - \text{中位數})$$

$$i = 680 \times \frac{1}{2} = 340 > 266 \text{ (第 2 組累積次數)}$$

$$M_e = 9.5 + \frac{340 - 266}{280} (14.5 - 9.5) = 10.8214$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{眾數} &= 10.7426 - 3 \cdot (10.7426 - 10.8214) \\ &= 10.979 \end{aligned}$$

16.

組界	$x_i$ 組中點	次數		$f_i x_i$		累積次數	
		A	B	A	B	A	B
40-45	42.5		1		42.5		1
45-50	47.5		2		95		3
50-55	52.5	1	2	52.5	105	1	5
55-60	57.5	1	2	57.5	115	2	7
60-65	62.5	4	3	250	187.5	6	10
65-70	67.5	17	5	1147.5	337.5	23	15
70-75	72.5	12	15	870	1087.5	35	30
75-80	77.5	7	4	542.5	310	42	34
80-85	82.5	4	2	330	165	46	36
85-90	87.5	3		262.5		49	
90-95	92.5	1		92.5		50	
總計		50	36	3605	2245		

$$\bar{x}_A = \frac{3605}{50} = 72.1 \quad \bar{x}_B = \frac{2445}{36} = 67.9167$$

$$S_A^2 = 63.1020 \quad S_B^2 = 96.2500$$

$$S_A = 7.9437 \quad S_B = 9.8107$$

$\bar{x}_A > \bar{x}_B \Rightarrow A$  班較優

$S_B > S_A \Rightarrow B$  班成績較為參差不齊

$$\begin{aligned} 17. (a) \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) &= \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x} = n \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \sum_{i=1}^n \bar{x} \\ &= n \cdot \bar{x} - n\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

(b)  $A$  為任意值

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2Ax_i + A^2) - \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2A \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n A^2 + 2\bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \\
 &= -2nA\bar{x} + nA^2 + 2n\bar{x}^2 - n\bar{x}^2 \left( \because \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x} \right) \\
 &= -2nA\bar{x} + nA^2 + n\bar{x}^2 \\
 &= n(A^2 - 2A\bar{x} + \bar{x}^2) = n(A - \bar{x})^2 \geq 0 \\
 \therefore \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 &\geq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2
 \end{aligned}$$

18.  $n = 50$

(a)  $i = 50 \times \frac{1}{2} = 25$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} M_e &= \frac{\text{第 25 位數值} + \text{第 26 位數值}}{2} \\
 &= \frac{4.50 + 4.51}{2} \\
 &= 4.505
 \end{aligned}$$

$$i = 50 \times \frac{1}{4} = 12.5$$

$\textcircled{2} Q_1 = \text{第 13 位數值} = 4.30$

$$i = 50 \times \frac{3}{4} = 37.5 \text{ 為整數}$$

$\textcircled{3} Q_3 = \text{第 38 位數值} = 4.70$

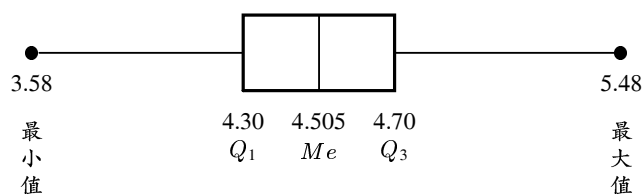
(b)  $i = 50 \times \frac{90}{100} = 45 \text{ 為整數}$

$$\begin{aligned}
 P_{90} &= \frac{\text{第 45 位數值} + \text{第 46 位數值}}{2} = \frac{4.80 + 5.07}{2} \\
 &= 4.935
 \end{aligned}$$

$$(c) \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{225.37}{50} = 4.5074$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = 0.3681$$

(d)



19. (a) 平均數  $\mu = 76.5$  (萬元), 中位數  $= \frac{(83 + 86)}{2} = 84.5$  (萬元), 眾數  $= 95$  (萬元)

(b) 平均數被極小值 30 拉低了, 而眾數出現在最高值 95, 故此組資料為左偏的分配; 在偏態分配的資料中, 以中位數較具集中趨勢的代表性。

20.  $\bar{x} = 78, S = 9.35$

成績	82	77	86	66	73	95	70	75
$z$ 分數	0.428	-0.107	0.856	-1.284	-0.535	1.818	-0.856	-0.321

21. (a)  $\bar{x} = 11$       (b)  $S = 2.5$       (c)  $x - \bar{x} = 14.24$

22. (a)  $Q_1 = 8.5$ 、 $Q_3 = 16.5$ 、中位數  $= 14.5$

(b)  $IQR = 16.5 - 8.5 = 8$

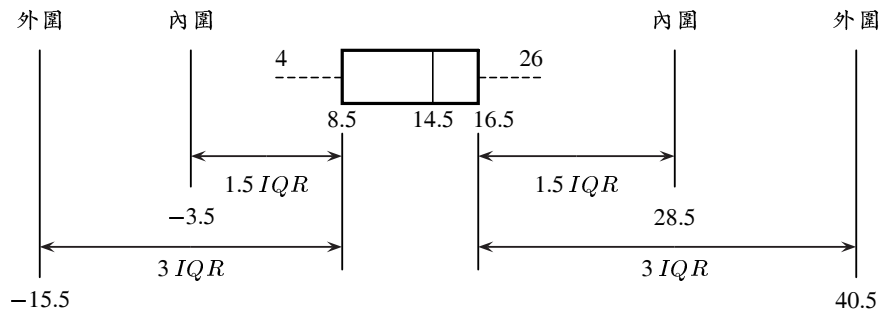
(c)  $1.5(IQR) = 12, 3(IQR) = 24$

所以

$$\text{內圍值為} \begin{cases} 8.5 - 12 = -3.5 \\ 16.5 + 12 = 28.5 \end{cases}$$

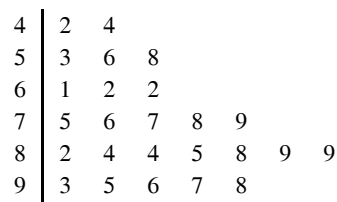
$$\text{外圍值為} \begin{cases} 8.5 - 24 = -15.5 \\ 16.5 + 24 = 40.5 \end{cases}$$

其箱形圖如下：

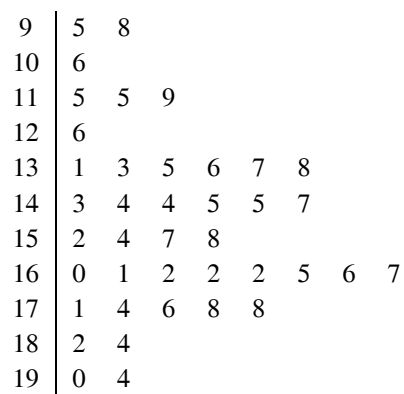


由此可知，此組資料不存在任何界外值。

23. 枝葉圖為：



24. 期中與期末考成績和之枝葉圖為：





25.  $\bar{X} = 79.125$ ，去除掉 60 與 92，

$$\bar{X}_{0.1} = \frac{1}{6}(75 + 79 + 80 + 82 + 82 + 83) = 80.17$$

26. (a) 算術平均數  $\bar{X} = \frac{83.52}{20} = 4.176$

$$\text{眾數 } M_0 = 4.25$$

$$\text{中位數 } M_e = \frac{4.22 + 4.24}{2} = 4.23$$

(b) 第 10 百分位數： $20 \times 0.1 = 2(\text{nd})$ ，故  $P_{10} = 3.98$ 。

第 90 百分位數： $20 \times 0.9 = 18(\text{th})$ ，故  $P_{90} = 4.27$ 。

(c) 全距  $R = 4.36 - 3.97 = 0.39$

第一個四分位數： $20 \times 0.25 = 5(\text{th})$ ，故第一四分位數

$$Q_1 = 4.09。$$

第三個四分位數： $20 \times 0.75 = 15(\text{th})$ ，故第三四分位數

$$Q_3 = 4.25。$$

$$\text{四分位全距 } IQR = Q_3 - Q_1 = 4.25 - 4.09 = 0.16$$

(d) 變異數  $S^2 = \frac{\sum(x - \bar{X})^2}{n - 1} = \frac{0.23548}{20 - 1} = 0.0124$

$$\text{變異係數 } CV = \frac{\sqrt{0.0124}}{4.176} = 0.0267$$

(e) 動差法： $M_2 = \frac{1}{N} \sum (X_i - \mu)^2 = 0.01177$

$$M_3 = \frac{1}{N} \sum (X_i - \mu)^3 = -0.00065$$

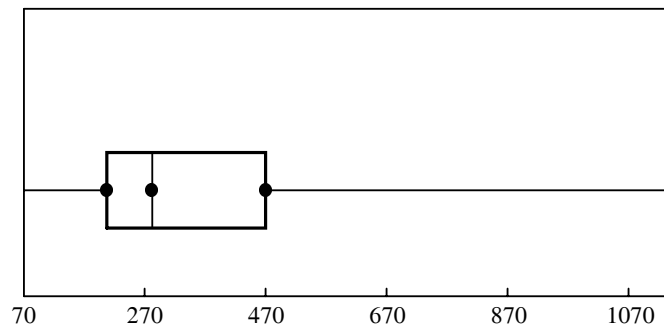
$$\text{偏態量數 } \alpha_3 = \frac{M_3}{(\sqrt{M_2})^3} = -0.51 < 0 \Rightarrow \text{為稍微左偏分配}$$

$$(f) M_4 = \frac{1}{N} \sum (X_i - \mu)^4 = 0.0003$$

$$\text{峰態量數 } \alpha_4 = \frac{M_4}{M_2^2} = 2.164 < 3 \Rightarrow \text{為平闊峰}$$

27. 從盒鬚圖中我們可得知最小值、第一個四分位數 ( $Q_1$ )、中位數 ( $M_e$ )、第三個四分位數 ( $Q_3$ ) 以及最大值等五個量數。而由上表中可知其最小值為 73.1、最大值為 1030，中位數為 278.7、 $Q_1 = 206$ 、 $Q_3 = 451$ ，因此其四分位距  $IQR = Q_3 - Q_1 = 451 - 206 = 245$ 、內圍值 (inner fences) 為：-161.5 與 818.5 (內圍值 =  $Q_1 - 1.5IQR$  或  $Q_3 + 1.5IQR$ )、外圍值 (outer fences) 為：-529 與 1,186 (外圍值 =  $Q_1 - 3IQR$  或  $Q_3 + 3IQR$ ) 大肚鄉的測量值 1030 噸的鐵鋁罐回收，資料落在外圍與內圍之間，視為是平穩界外值 (mild outlier)，因此對資料群不會有太大的影響。且由下圖圖形之呈現，盒鬚圖中的箱子位於靠左的位置，右尾較長，故為右偏分配。

盒鬚圖



$$28. (a) \text{總平均所得} = \frac{240 \times 200 + 160 \times 150}{240 + 160} = 180 \text{ (萬元)}$$

(b) 變異數

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(240-1)50^2 + (160-1)50^2 + 240(200-180)^2 + 160(150-80)^2}{240+160-1} \\
 &= 3095
 \end{aligned}$$

$$\text{標準差} = \sqrt{3095} = 55.63 \text{ 萬元}$$

(c) 醫師的變異係數  $CV = \frac{50}{200} = 0.25$

$$\text{教師的變異係數 } CV = \frac{50}{150} = \frac{1}{3} = 0.33$$

故知教師的所得差異較大。

(d) 均為右偏分配，醫師的偏態量數為  $\frac{200-120}{50} = 1.6$ ，教師的偏態量數為  $\frac{150-100}{50} = 1$ ，因此醫師所得的分配較為偏態。

$$\begin{aligned}
 29. \quad z &= \frac{50-55}{20} = \frac{y-65}{10} \\
 y &= 67.5
 \end{aligned}$$

$$30. \text{ 阿福便當的 } Z = \frac{85-80}{10} = 0.5$$

$$\text{阿寶便當的 } Z = \frac{75-70}{5} = 1$$

因阿寶便當的  $Z$  分數為 1，比阿福便當的  $Z$  分數為大，可知阿寶雞腿飯在台中市相對較貴。