

# 運動分析

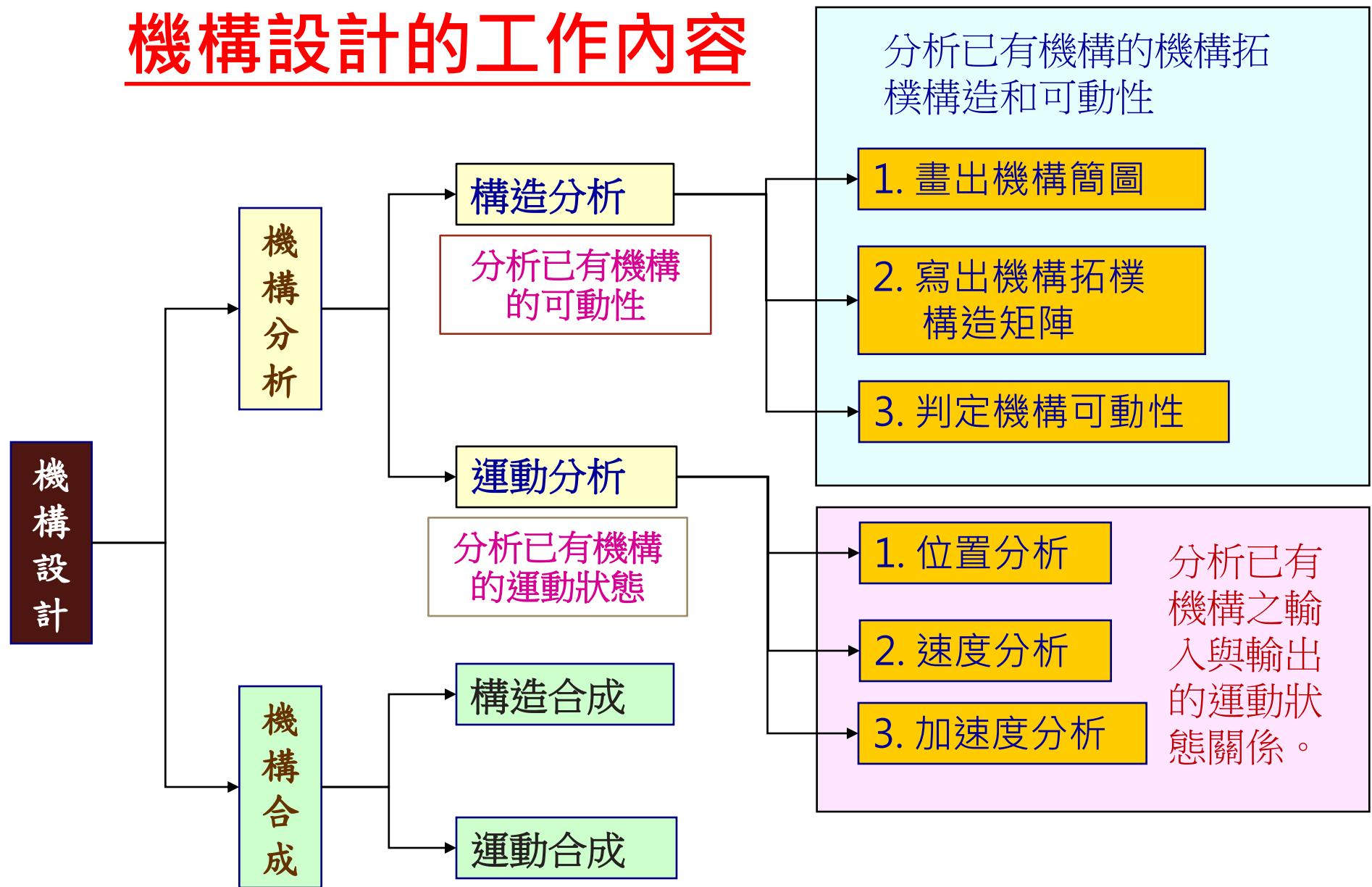
分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係

Ch5：位置分析

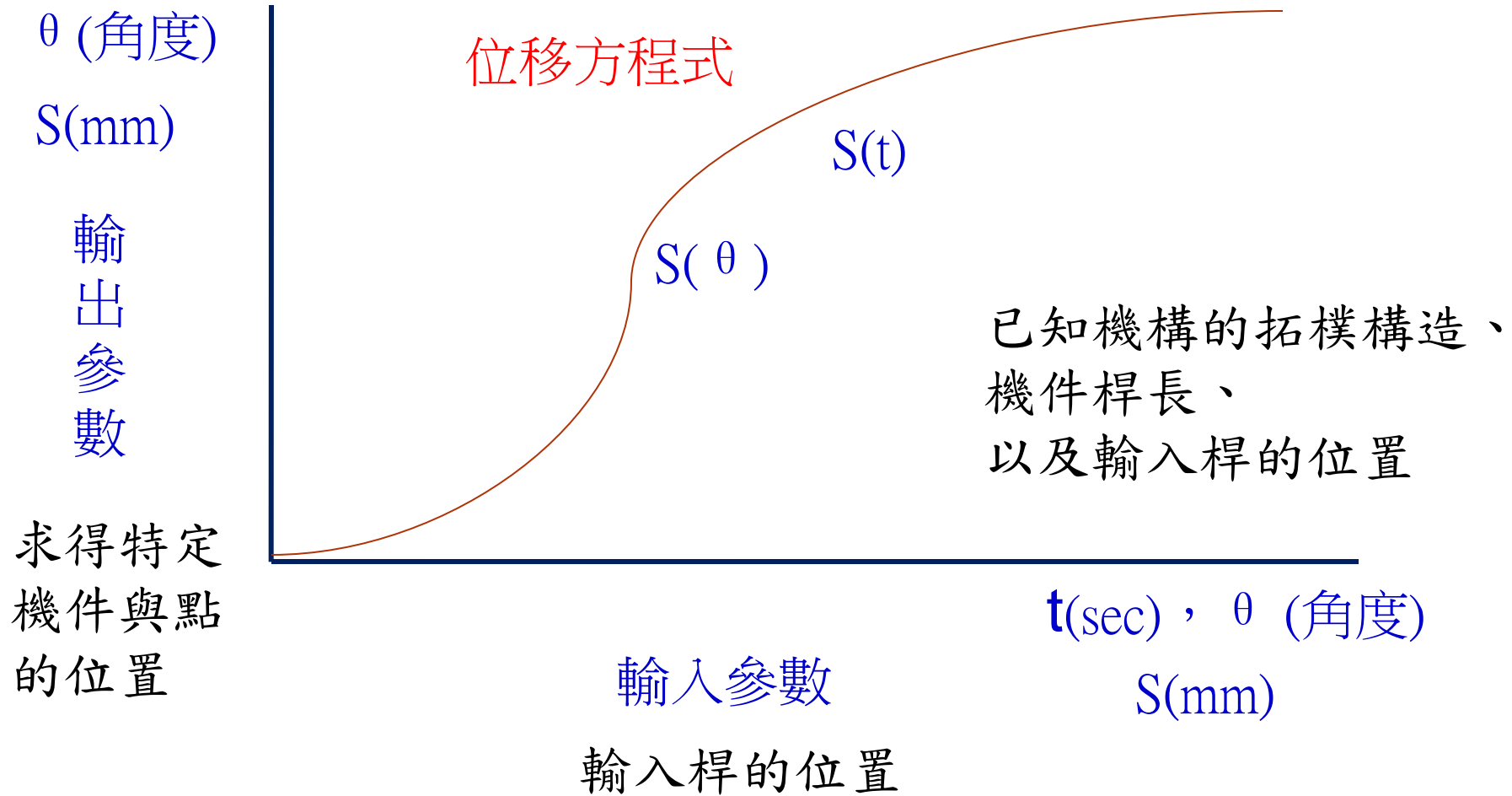
Ch6：速度分析

Ch7：加速度分析

# 機構設計的工作內容

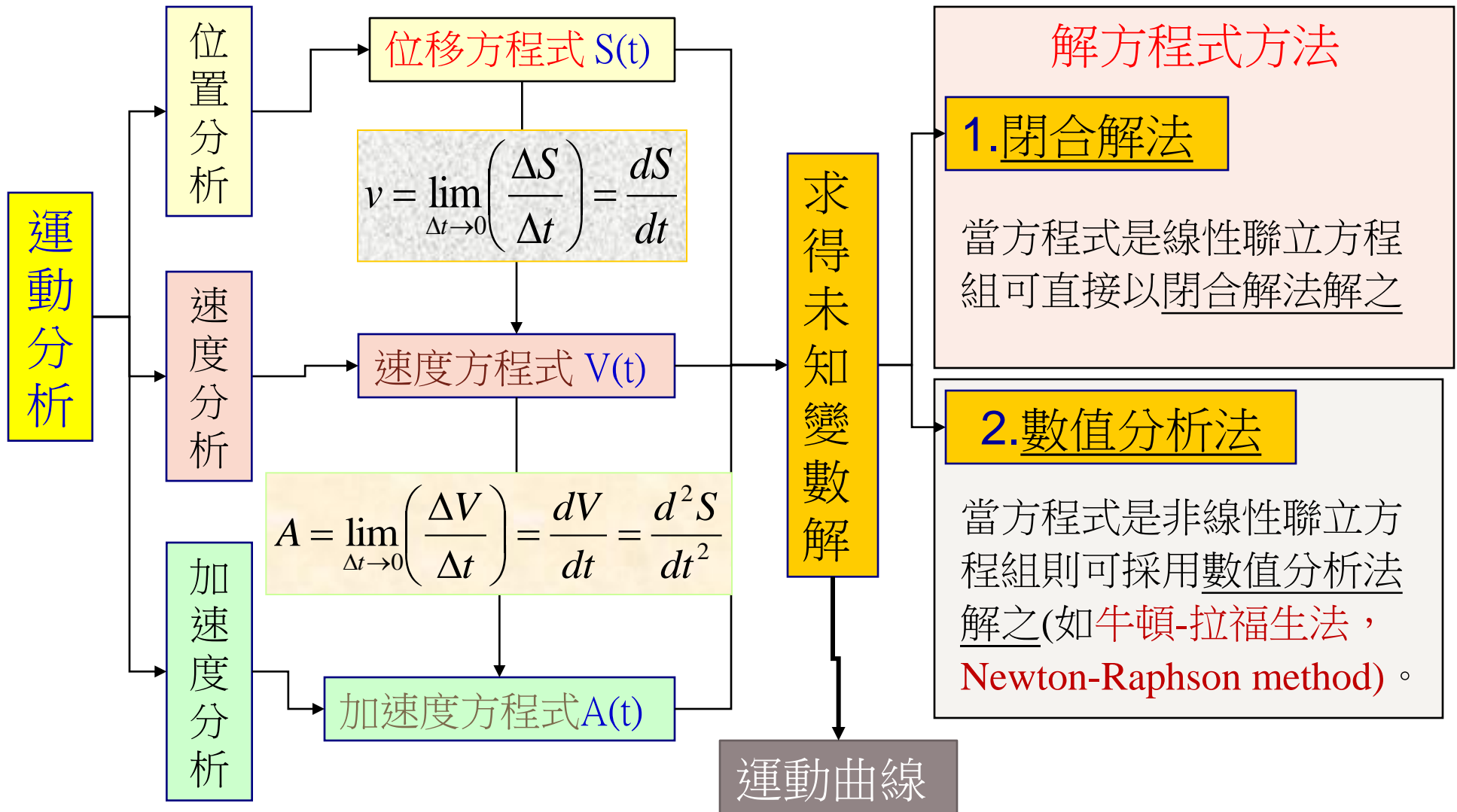


# 運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



(位置分析 → 位移方程式  $S(t)$  → 位移曲線)

# 運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



# 運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係

Ch5:位置分析 → 位移方程式  $S(t)$  → 位移曲線

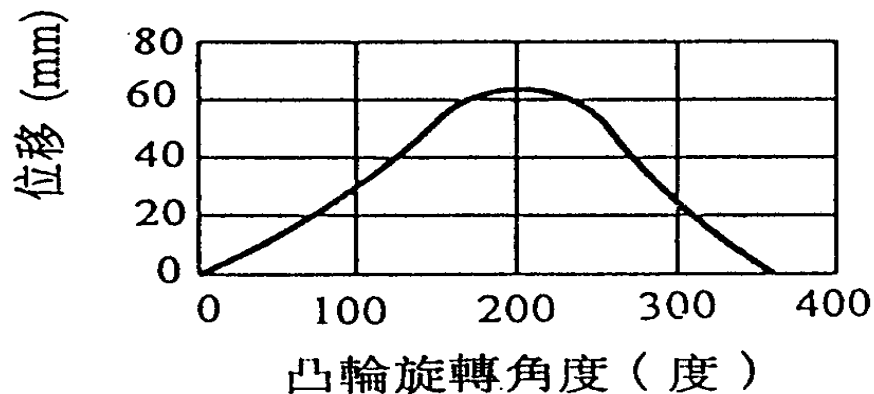
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = \frac{dS}{dt}$$

Ch6:速度分析 → 速度方程式  $V(t)$  → 速度曲線

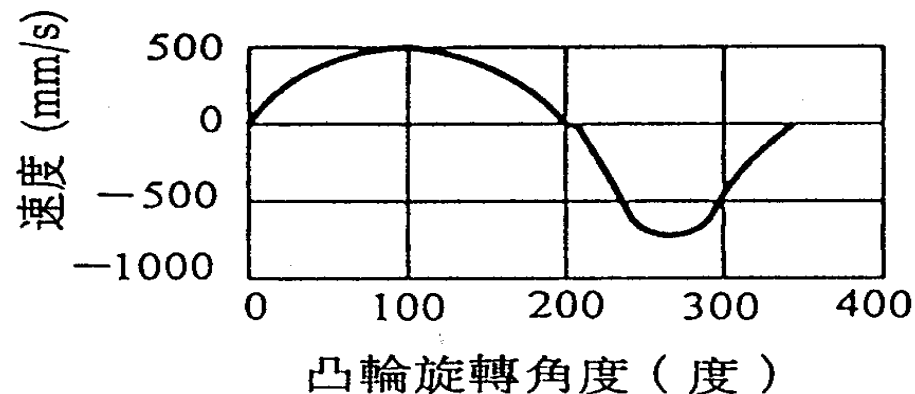
$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Ch7:加速度分析 → 加速度方程式  $A(t)$  → 加速度曲線

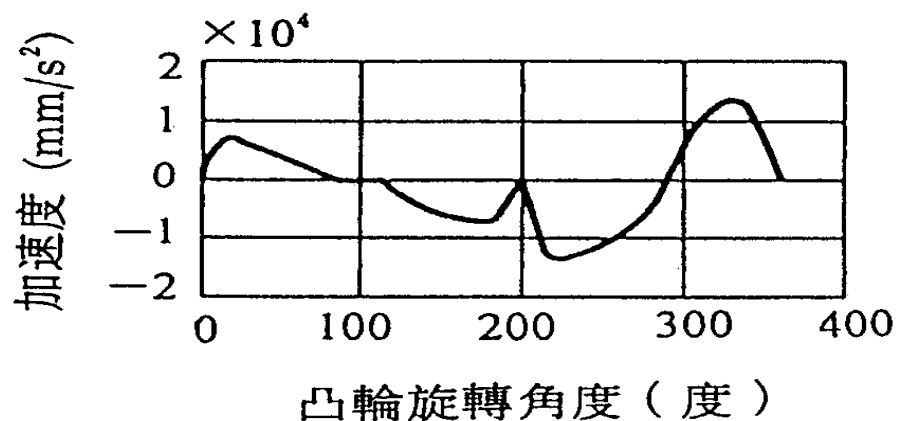
# 運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



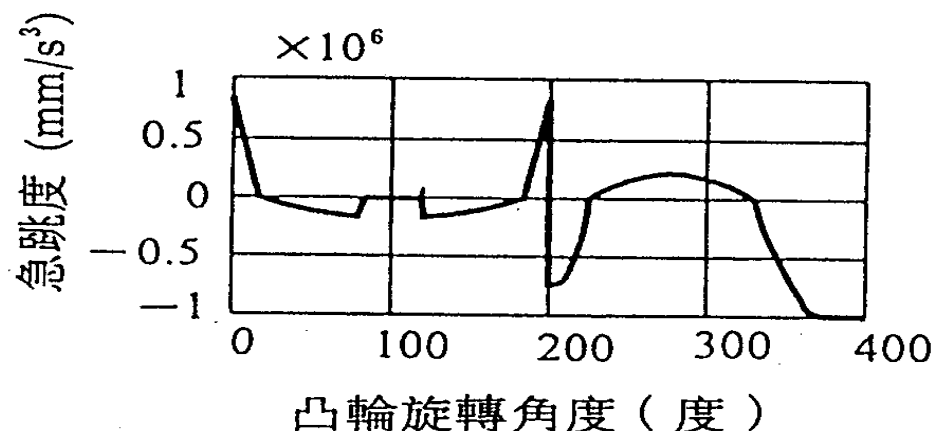
(a) 位移曲線



(b) 速度曲線



(c) 加速度曲線



(d) 急跳度曲線

圖9.18 從動件運動曲線圖

# 運動分析課程內容重點

## Ch5:位置分析

- 向量迴路法

## Ch6:速度分析

- 瞬心法
  - 瞬心的定義
  - 三心定理
  - 瞬心的求法
  - 瞬心法速度分析
- 向量迴路法

## Ch7:加速度分析

- 向量迴路法

## Ch9-10:直接接觸傳動

- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

- **Ch10:齒輪系Gear train**

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

# 運動分析課程內容重點

- 向量迴路法
  - Ch5:位置分析(以連桿機構為例)
  - Ch6:速度分析
  - Ch7:加速度分析
- 瞬心法速度分析
  - Ch6:瞬心的定義與求法
  - Ch9-10:直接接觸傳動
  - Ch10:齒輪系轉速比



# 速度分析課程內容重點

- 瞬心法速度分析

- 瞬心的定義
- 三心定理
- 瞬心的求法
- 瞬心法速度分析

## Ch9-10:直接接觸傳動

- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

- Ch10:齒輪系Gear train

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

## 第六章 速度分析Velocity analysis

- ◎根據已知輸入機件之速度及已完成的位置分析，藉由適當的方法，來求得輸出機件之速度及特定點的線速度。
- ◎在機構與機器設計中，速度(Velocity)扮演一個重要的角色，有相當多的用途，如加速度分析、動力分析、運動能量、摩擦力方向、運動的相對路徑、等值質量或慣性矩、虛功原理、動量守恒原理、機械利益、...等，皆需要速度分析。
- ◎分析機構桿件與點之速度的方法不少，本章介紹瞬心法、相對速度法、以及易於電腦化的向量迴路法。

## 6-2 相對速度法 **Relative velocity method**

◎利用瞬心法，雖然可很直接的求得特定機件之角速度或其上重要點的線速度，但卻無法直接用來進行加速度分析。

◎以相對速度(**Relative velocity**)的概念來進行機構的速度分析，常作速度多邊形(**Velocity polygon**)來輔助。

◎點a的速度 (方向與oa垂直)為:

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \overrightarrow{oa}$$

點b的速度 (方向與ob垂直)為:

$$\vec{V}_b = \vec{\omega} \times \overrightarrow{ob}$$

點b相對於點a的速度為:

$$\vec{V}_{ba} = \vec{V}_b - \vec{V}_a$$

方向與ba垂直。

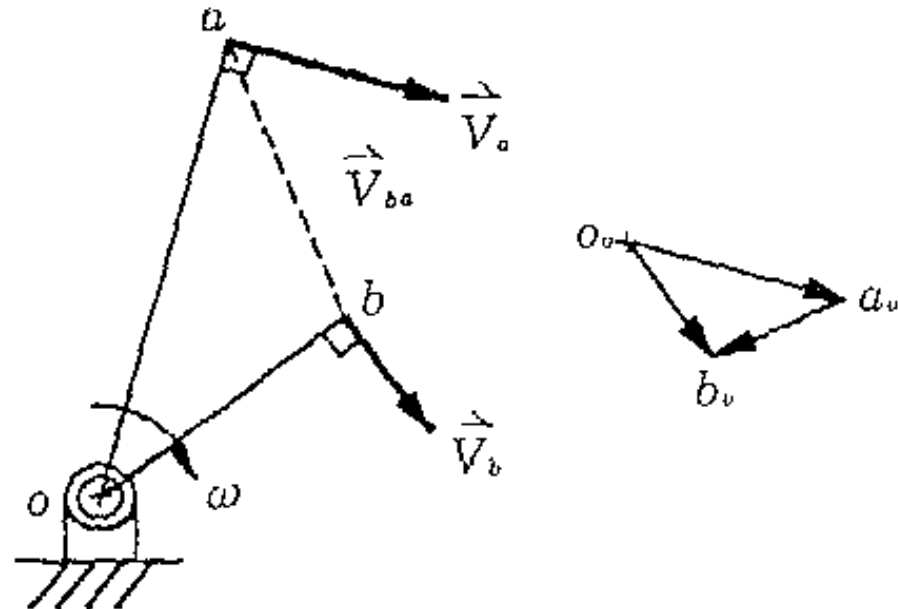


圖6.7 相對速度

**[例6.5]**有一個滑件曲柄機構， $a_o a = 10\text{cm}$ ， $ab = 30\text{cm}$ ，若曲柄的角速度 $\omega_2 = 100\text{ rad/sec}$  (反時針方向)，試利用相對速度法求連接桿之角速度 $\omega_3$ 及滑件的線速度 $V_4$ 。

1.  $V_a = \omega_2(a_o a) = 100 \times 10 = 1,000\text{ cm/sec}$ 。

2.  $\vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{V}_{ba}$

$\begin{matrix} D\sqrt{ & D\sqrt{ & D\sqrt{ \\ M? & M\sqrt{ & M? \end{matrix}$

3. 取速度比例 $k_v = 400$ ， $1\text{cm} = 400\text{cm/sec}$ 。  
量得 $o_v b_v = 2.5\text{cm}$ ， $a_v b_v = 1.31\text{cm}$ 。

4.  $V_{ba} = k_v \times a_v b_v = 400 \times 1.31 = 524\text{cm/sec}$ ，  
 $\omega_3 = V_{ba} / ba = 524 / 30 = 17.5\text{rad/sec (c.w.)}$ 。

5.  $V_4 = V_b = k_v \times o_v b_v = 400 \times 2.5 = 1,000\text{cm/sec}$ 。

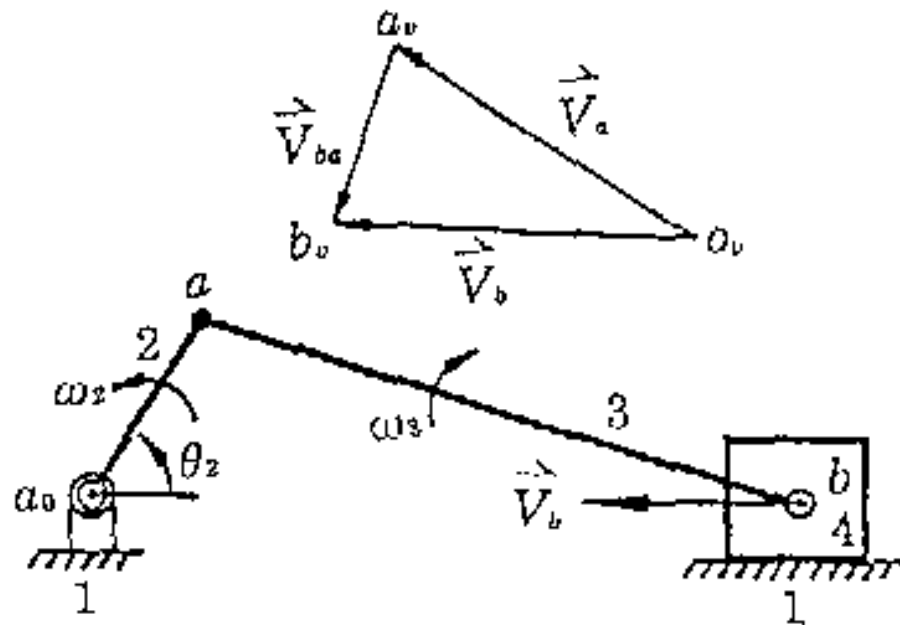


圖6.8 滑件曲柄機構[例6.5]

[例6.6] 若滾子(機件2)的角速度 $\omega_2$ 為已知，試利用相對速度法求搖臂(機件4)的角速度 $\omega_4$ 。

$$\vec{V}_{b_4} = \vec{V}_{b_2} + \vec{V}_{b_4 b_2}$$

$$\begin{array}{c} D\sqrt{\quad} \quad D\sqrt{\quad} \quad D\sqrt{\quad} \\ M? \quad M\sqrt{\quad} \quad M? \end{array}$$

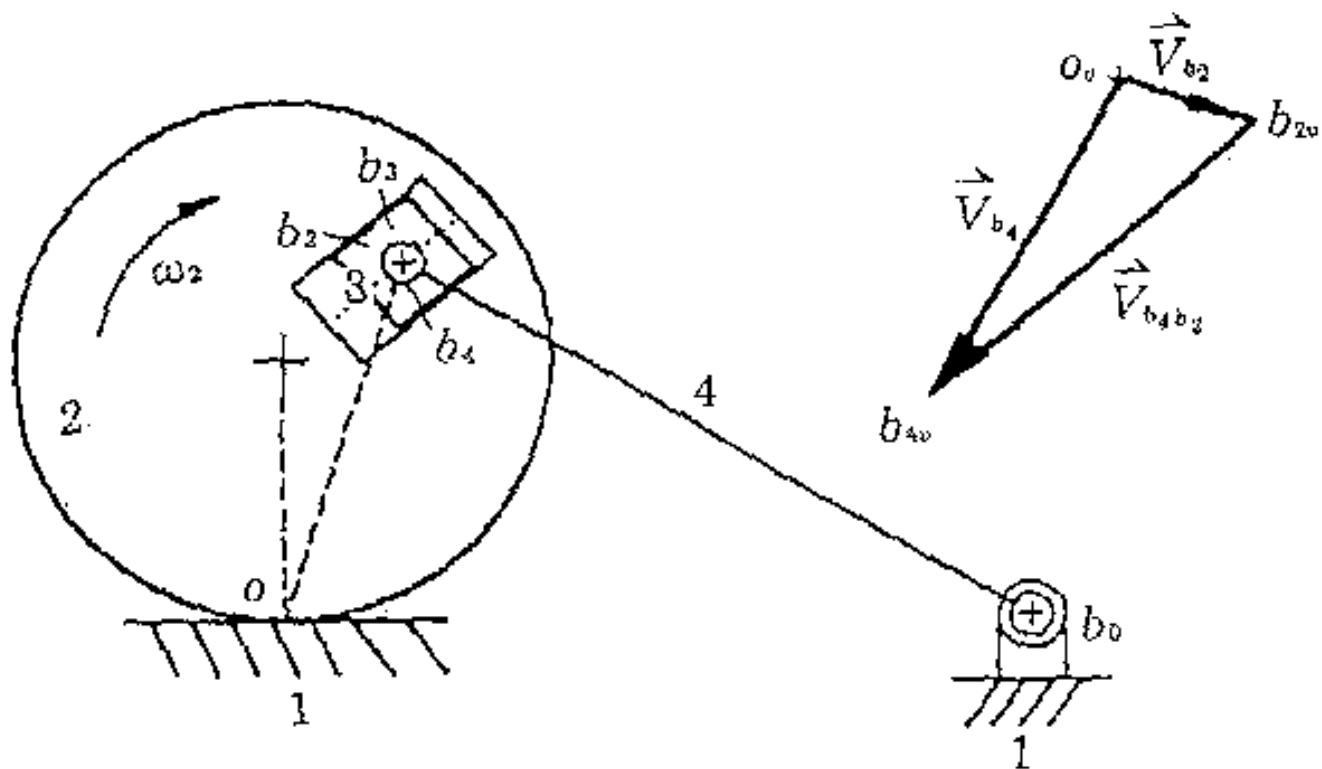


圖6.9 四連桿機構[例6.6]

## 6-3 向量迴路法 **Vector loop method**

◎利用向量迴路法可推導出機構的位移方程式，將位移方程式對時間微分一次，可得到一組線性的聯立方程式，即**速度方程式(Velocity equation)**，解此聯立方程式即可得到各桿件的角速度，據此可推導出各桿件上重要點的線性速度。

[例6.7] 為已知，試利用向量迴路法求桿3的角速度與滑件4的速度。

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = \mathbf{0} \quad (6-1)$$

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_4 = 0 \quad (6-2)$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_1 = 0 \quad (6-3)$$

在  $\theta_2=60^\circ$  時，  $\theta_3=316.9^\circ$ ，  $r_4=3.922 \text{ cm}$ 。

$$(-r_3 \sin \theta_3) \dot{\theta}_3 + (-1) \dot{r}_4 = r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (6-4)$$

$$(r_3 \cos \theta_3) \dot{\theta}_3 + (0) \dot{r}_4 = -r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (6-5)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\left(\frac{r_2}{r_3}\right) \left(\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3}\right) \dot{\theta}_2 \quad (6-6)$$

$$\dot{r}_4 = -r_2 (\sin \theta_2 - \cos \theta_2 \tan \theta_3) \dot{\theta}_2 \quad (6-7)$$

在  $\theta_2=60^\circ$  時：

$$\dot{\theta}_3 = -0.342 \dot{\theta}_2 \quad \dot{r}_4 = -2.666 \dot{\theta}_2$$

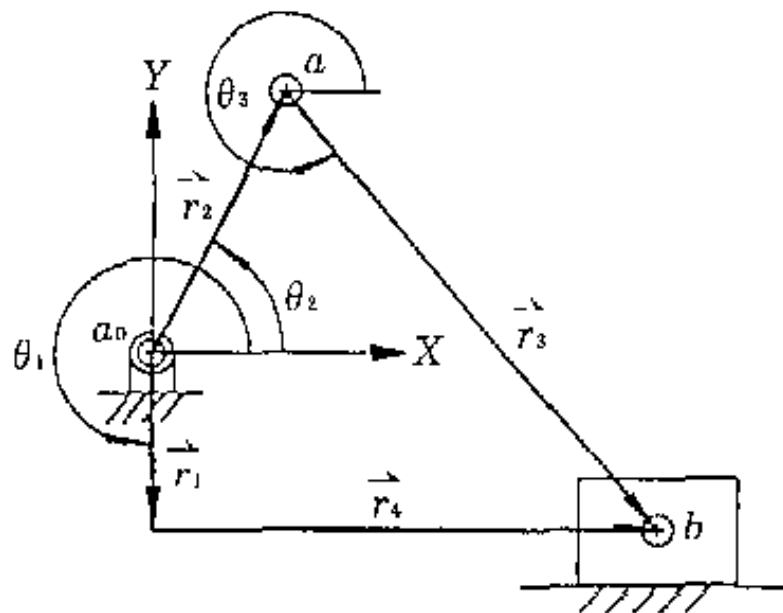


圖6.10 滑件曲柄機構[例6.7]

[例6.8]  $\omega_2=10\text{rad/sec}$ (反時針方向)，試利用向量迴路法進行速度分析。

$$36 \cos \theta_3 + 14 \cos \theta_4 - 50 \cos \theta_5 = 50 \quad (6-8)$$

$$36 \sin \theta_3 + 14 \sin \theta_4 - 50 \sin \theta_5 = 0 \quad (6-9)$$

$$1.5\theta_3 - \theta_4 = 0.5\theta_2 + 30^\circ \quad (6-10)$$

當 $\theta_2=30^\circ$ 時,  $\theta_3=63.83^\circ$ ,  $\theta_4=50.74^\circ$ ,  $\theta_5=120.35^\circ$

$$(-36 \sin \theta_3)\omega_3 - (14 \sin \theta_4)\omega_4 + (50 \sin \theta_5)\omega_5 = 0$$

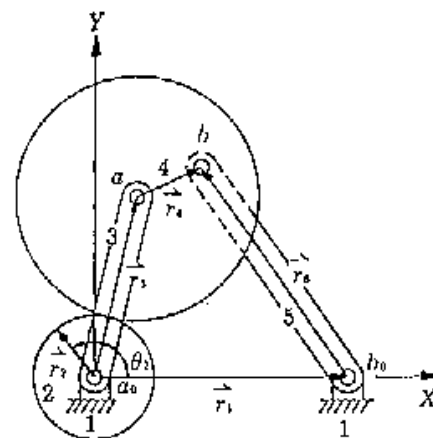
$$(36 \cos \theta_3)\omega_3 + (14 \cos \theta_4)\omega_4 - (50 \cos \theta_5)\omega_5 = 0$$

$$1.5\omega_3 - \omega_4 = 0.5\omega_2$$

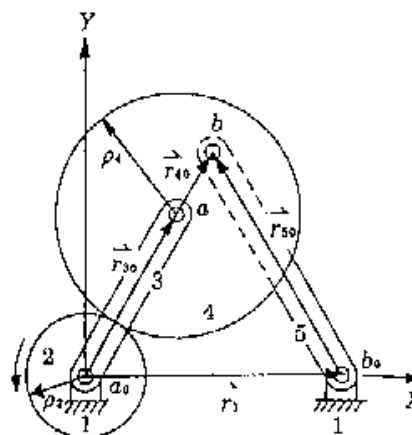
$$\omega_3 = 1.3199 \quad \text{rad/sec}$$

$$\omega_4 = -3.0202 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_5 = 0.2296 \text{ rad/sec}$$



(a)一般位置



(b)初始位置

圖6.11 齒輪五連桿機構[例5.8]

[例6.9]若  $\dot{r}_2$  為已知，試利用向量迴路法求桿4的角速度  $\dot{\theta}_4$ 。

$$\theta_3 = \theta_4 + 90^\circ \quad (6-14)$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0 \quad (6-15)$$

$$r_2 - r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (6-16)$$

$$r_1 - r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (6-17)$$

$$r_3 \sin \theta_4 - r_4 \cos \theta_4 = -r_2 \quad (6-18)$$

$$r_3 \cos \theta_4 + r_4 \sin \theta_4 = r_1 \quad (6-19)$$

$$(r_3 \cos \theta_4 + r_4 \sin \theta_4) \dot{\theta}_4 - (\cos \theta_4) \dot{r}_4 = -\dot{r}_2 \quad (6-20)$$

$$(r_3 \sin \theta_4 - r_4 \cos \theta_4) \dot{\theta}_4 - (\sin \theta_4) \dot{r}_4 = 0 \quad (6-21)$$

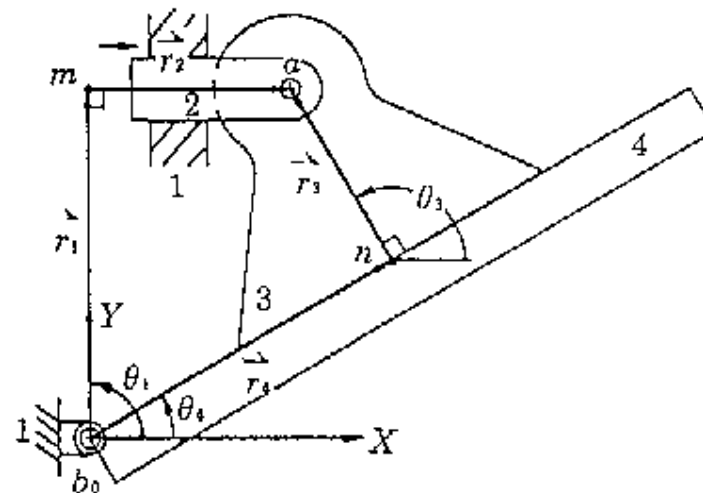


圖6.12 四連桿機構[例6.9]

聯立解式(6-20)和式(6-21)，可求得桿4的角速度為：

$$\dot{\theta}_4 = (-\sin \theta_4 / r_4) \dot{r}_2 \quad (6.22)$$



# 速度分析課程內容重點

## ■ 瞬心法速度分析

- 瞬心的定義
- 三心定理
- 瞬心的求法
- 瞬心法速度分析

## Ch9-10: 直接接觸傳動

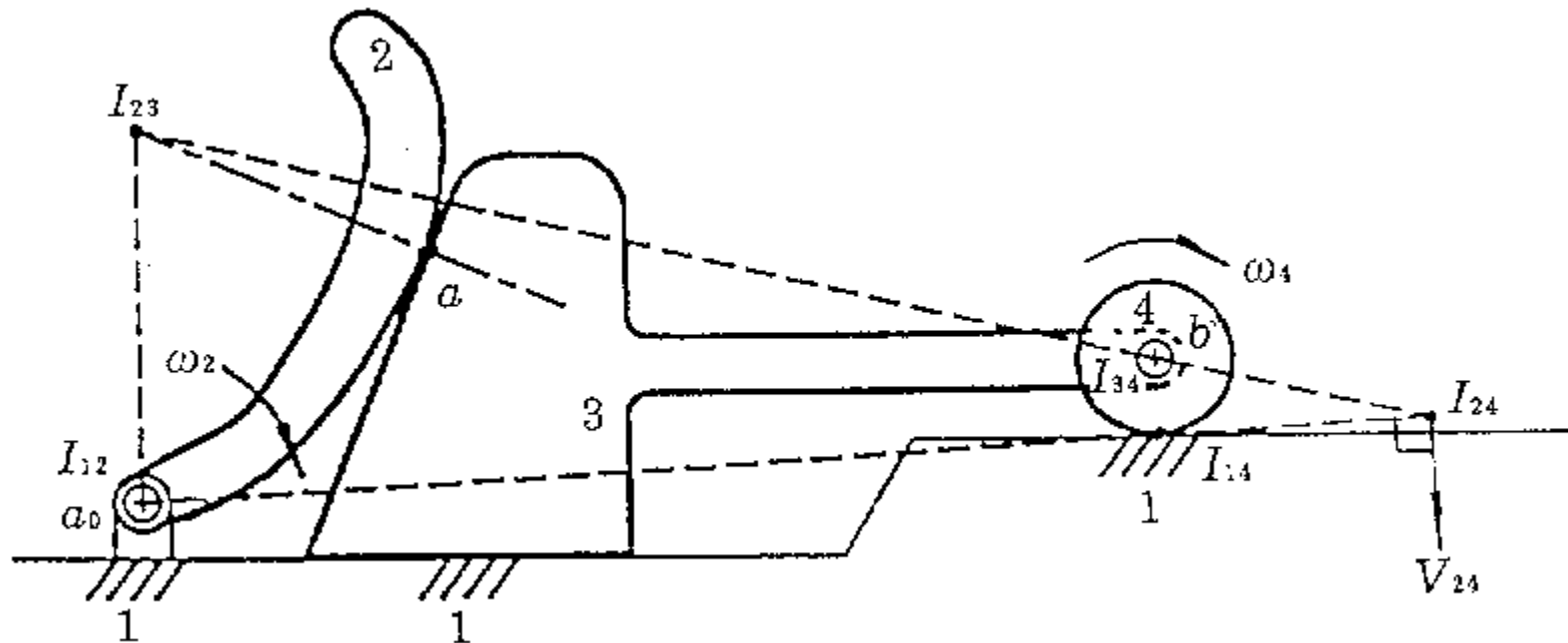
- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

## • Ch10: 齒輪系 Gear train

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

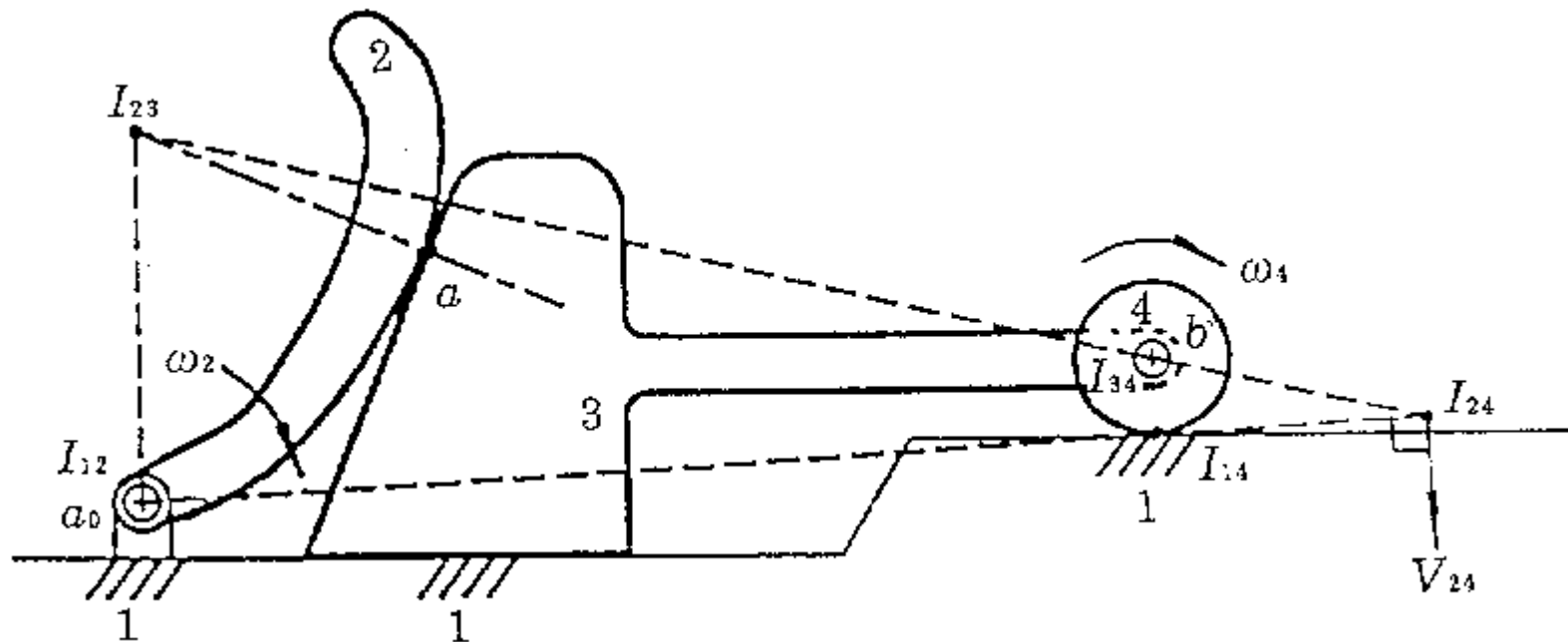
## 6-1 瞬心法 Instant center method

- 首先求得機構中兩桿之瞬心，再經瞬心由一桿的已知速度求得另外一桿的未知速度。
- 瞬心法是一種圖解法，無法直接用來進行加速度分析，因此大多是驗證利用其它方法進行速度分析之結果的正確性。



## 6-1 瞬心法 Instant center method

- 一個機構中的任意兩個機件(i和j)在任一時刻皆有一個共同點，且這個共同點在兩個機件上的線速度相同，則這個共同點稱為此二機件的瞬心(Instant center, instantaneous center, centro)，以 $I_{ij}$ 表示之。



## 6-1-2 三心定理 Kennedy 's Theorem

### ■ 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy 's Theorem):

任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

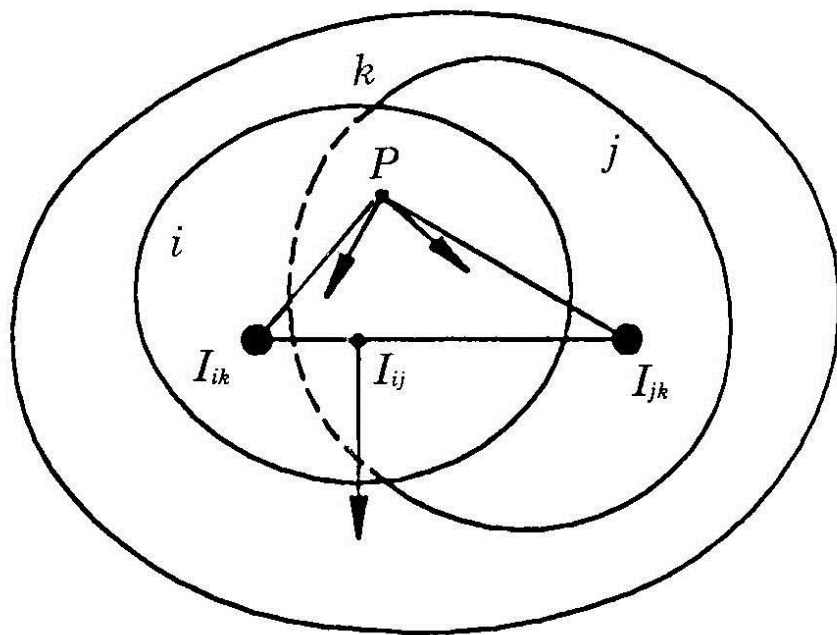


圖6.1 三心定理

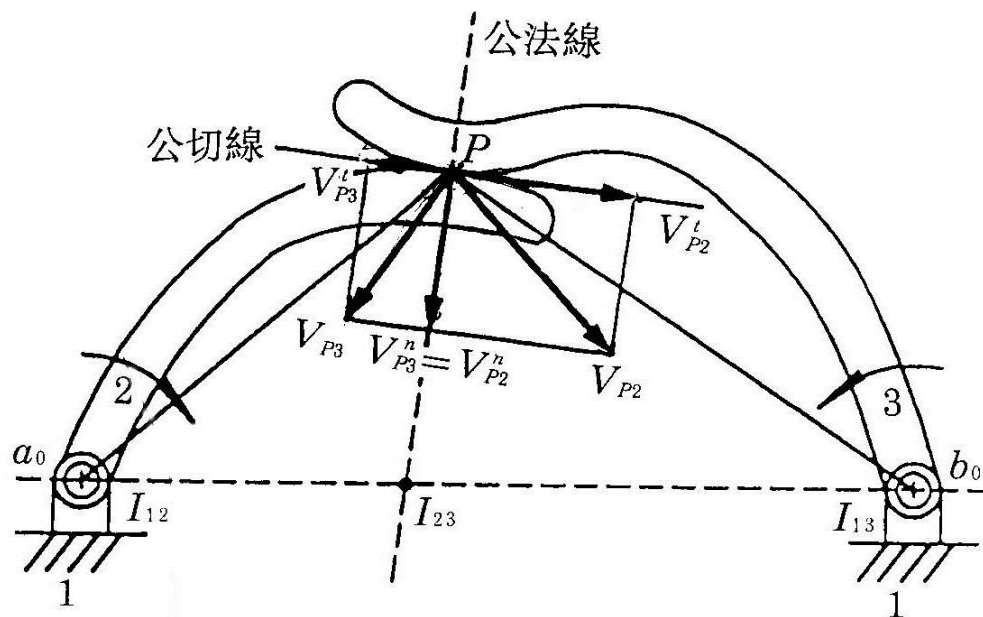
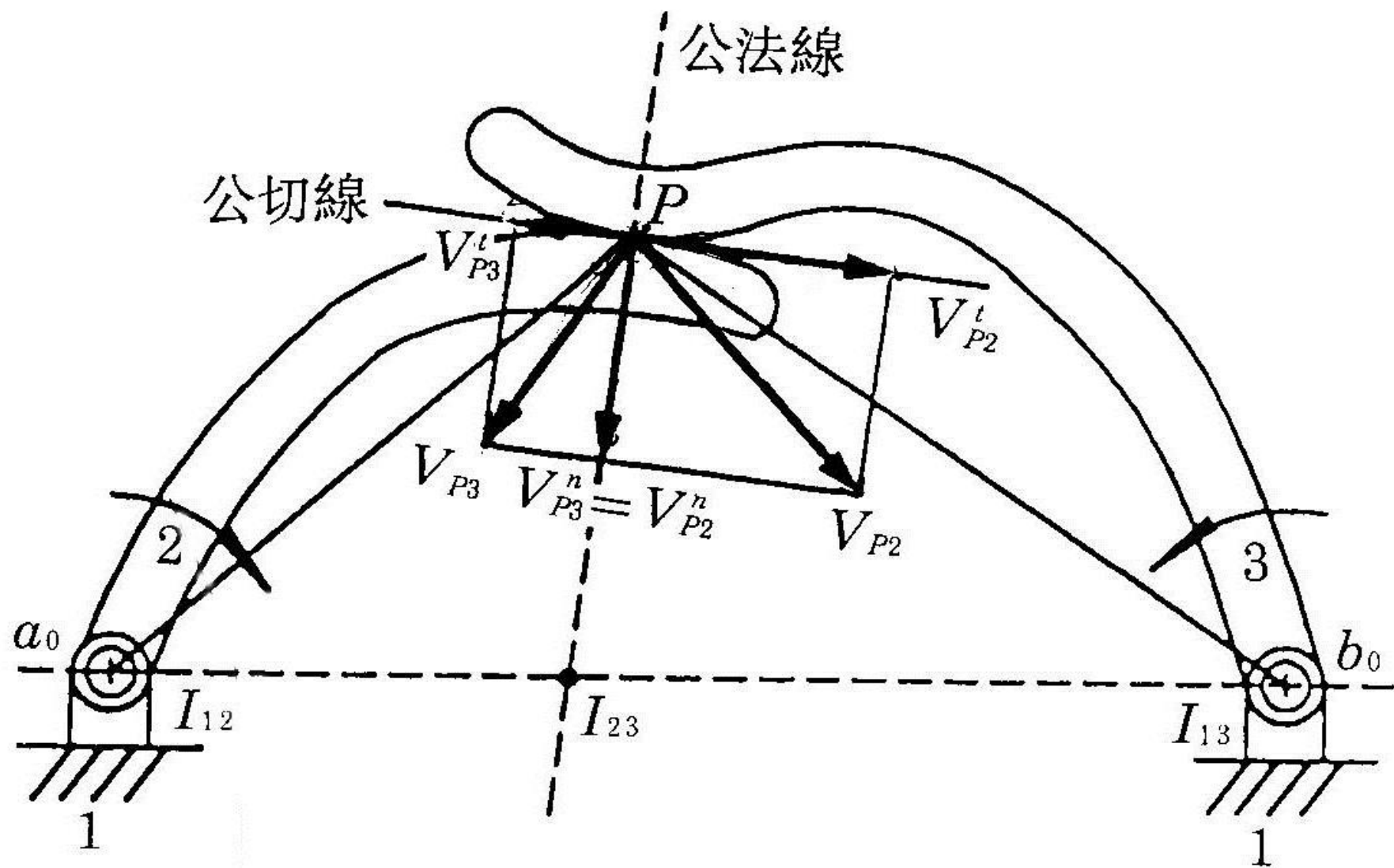


圖6.2 滑動接觸



## 6-1-2 三心定理 Kennedy 's Theorem

### ■ 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy 's Theorem):

任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

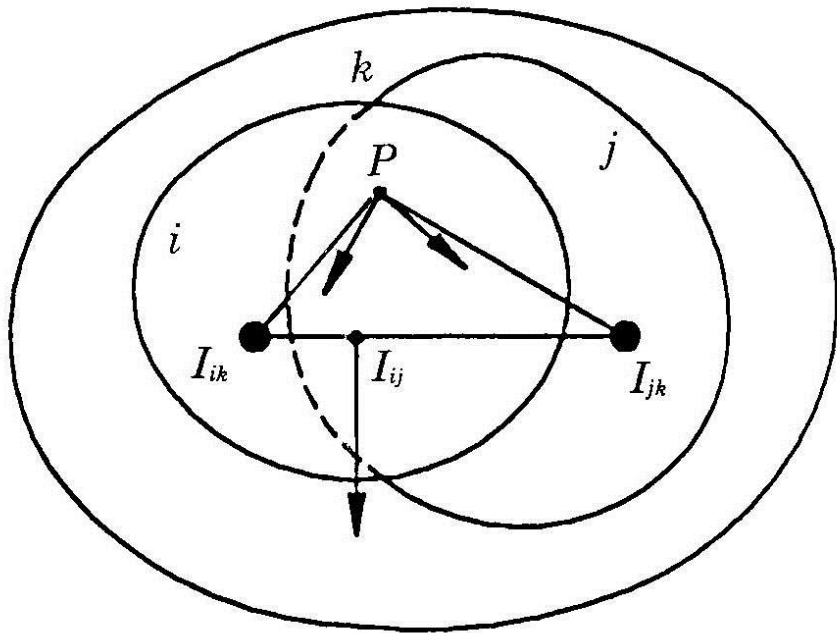


圖6.1 三心定理

- 設桿i、桿j、以及桿k為三個做相對平面運動的機件，如圖6.1所示。
- 桿i與桿k的瞬心為 $I_{ik}$ 、桿j與桿k的瞬心為 $I_{jk}$ ，若桿i與桿j的瞬心不在 $I_{ik}$ 和 $I_{jk}$ 的連線上，而在點P，則在這個瞬間，在桿i上點P的運動方向與 $PI_{ik}$ 垂直，而桿j上點P的運動方向與 $PI_{jk}$ 垂直，由於這兩個方向不同，所以點P在桿i與桿j上的速度不同，不是桿i與桿j的瞬心。
- 因此，唯有桿i與桿j的瞬心 $I_{ij}$ 在 $I_{ik}$ 和 $I_{jk}$ 的連線上，即三個機件的三個瞬心在一直線上，才能合乎瞬心的定義。

## 6-1-2 三心定理 Kennedy 's Theorem

### ■ 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy 's Theorem):

任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

- 圖6.2所示為一個三桿機構，桿1為固定桿，分別以旋轉對和桿2與桿3附隨，即 $a_0$ 和 $b_0$ 為固定軸樞。
- 若桿2和桿3以凸輪對附隨於接觸點 $P$ ，則點 $P$ 在桿2上之速度 $V_{P2}$ 於公法線上的分量，必須等於點 $P$ 在桿3上之速度 $V_{P3}$ 於公法線上的分量，否則桿2與桿3將產生分離現象。
- 再者，由於點 $P$ 不在 $a_0$ 和 $b_0$ 的連線上， $V_{P2}$ 在公切線上的分量及 $V_{P3}$ 在公切線上的分量皆不相等，而產生相對滑動運動。
- 所以，桿2與桿3在接觸點 $P$ 的相對運動，為沿著公切線方向的相對滑動，且相對旋轉中心(即瞬心 $I_{23}$ )必須在公法線上。
- 由於 $a_0$ 為瞬心 $I_{12}$ ， $b_0$ 為瞬心 $I_{13}$ ，根據三心定理， $I_{23}$ 必須在 $I_{12}$ 和 $I_{13}$ 的連線上；因此，瞬心 $I_{23}$ 位於通過接觸點 $P$ 的公法線及瞬心 $I_{12}$ 和 $I_{13}$ 之連線的交點上。

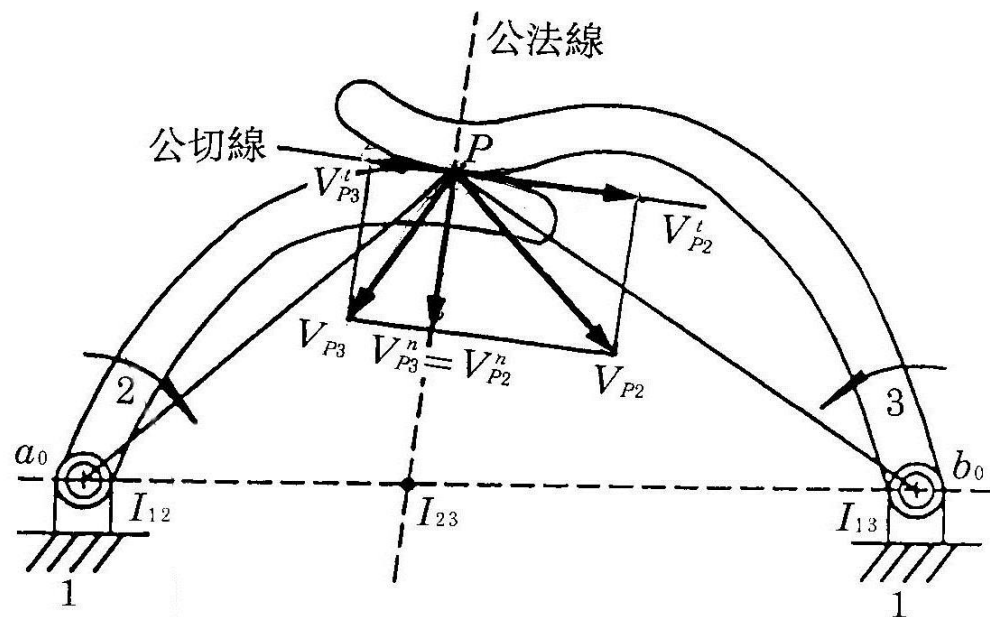


圖6.2 滑動接觸

## 6-1-3 瞬心的求法

■ 其步驟如下：

- 一. 機件以阿拉伯數字編號，桿*i*與桿*j*的瞬心以 $I_{ij}$ 表示之。
- 二. 計算瞬心數，並列出所有的瞬心。具有*N*根機件的機構，有 $N(N-1)/2$ 個瞬心。
- 三. 畫一輔助圓，在圓周上標示點1、點2、點3、...、點*N*，代表有*N*根機件。
- 四. 利用觀察法找出明顯的瞬心，如旋轉對、滑行對、滾動對、凸輪對等。
- 五. 若桿*i*與桿*j*的瞬心為已知，則在輔助圓上的點*i*與點*j*間畫一實線，其它未知瞬心則以虛線畫之。
- 六. 根據三心定理並配合輔助圓上的已知實線，決定未知瞬心(即虛線)的位置。



[例6.1] 有一個四連桿組，如圖6.3所示，  
試求此機構在這個位置的瞬心位置。

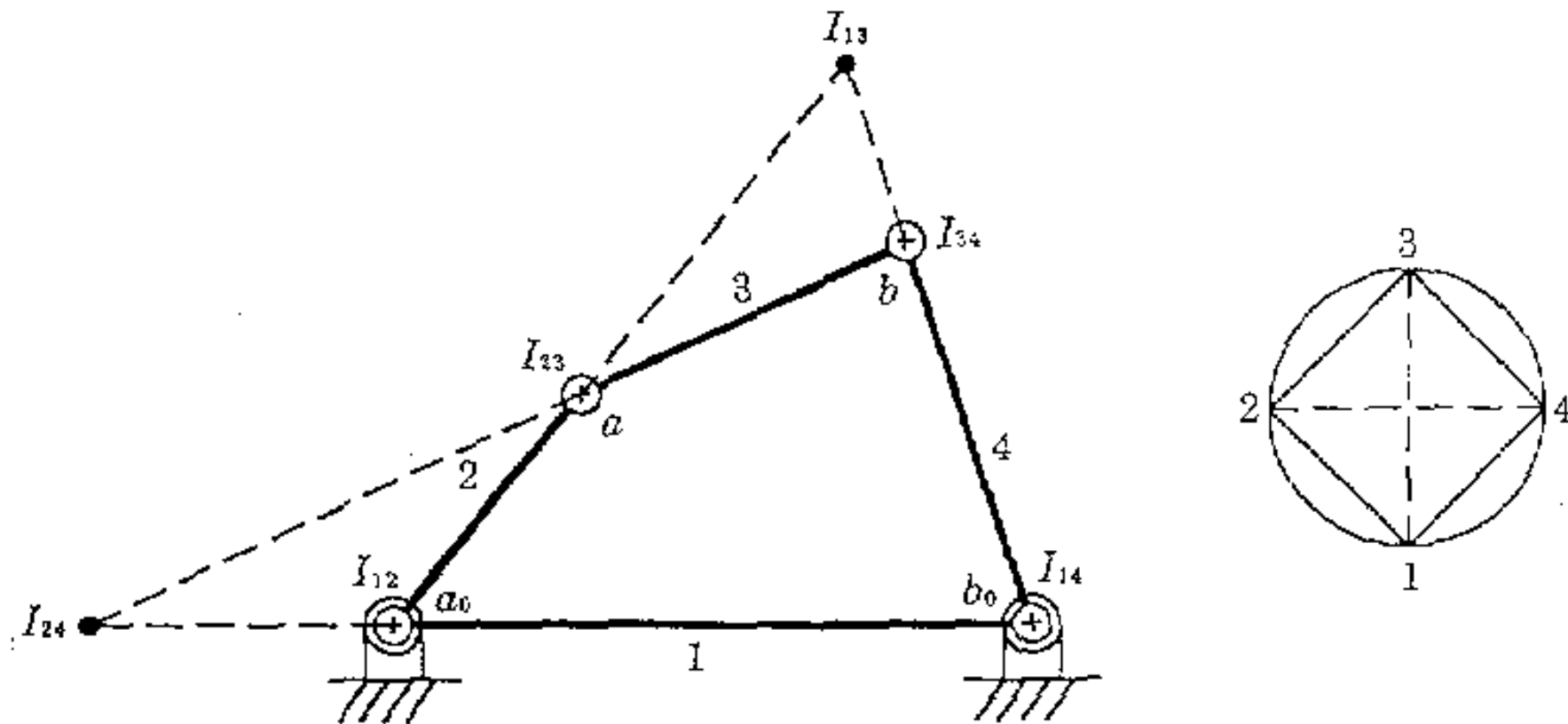
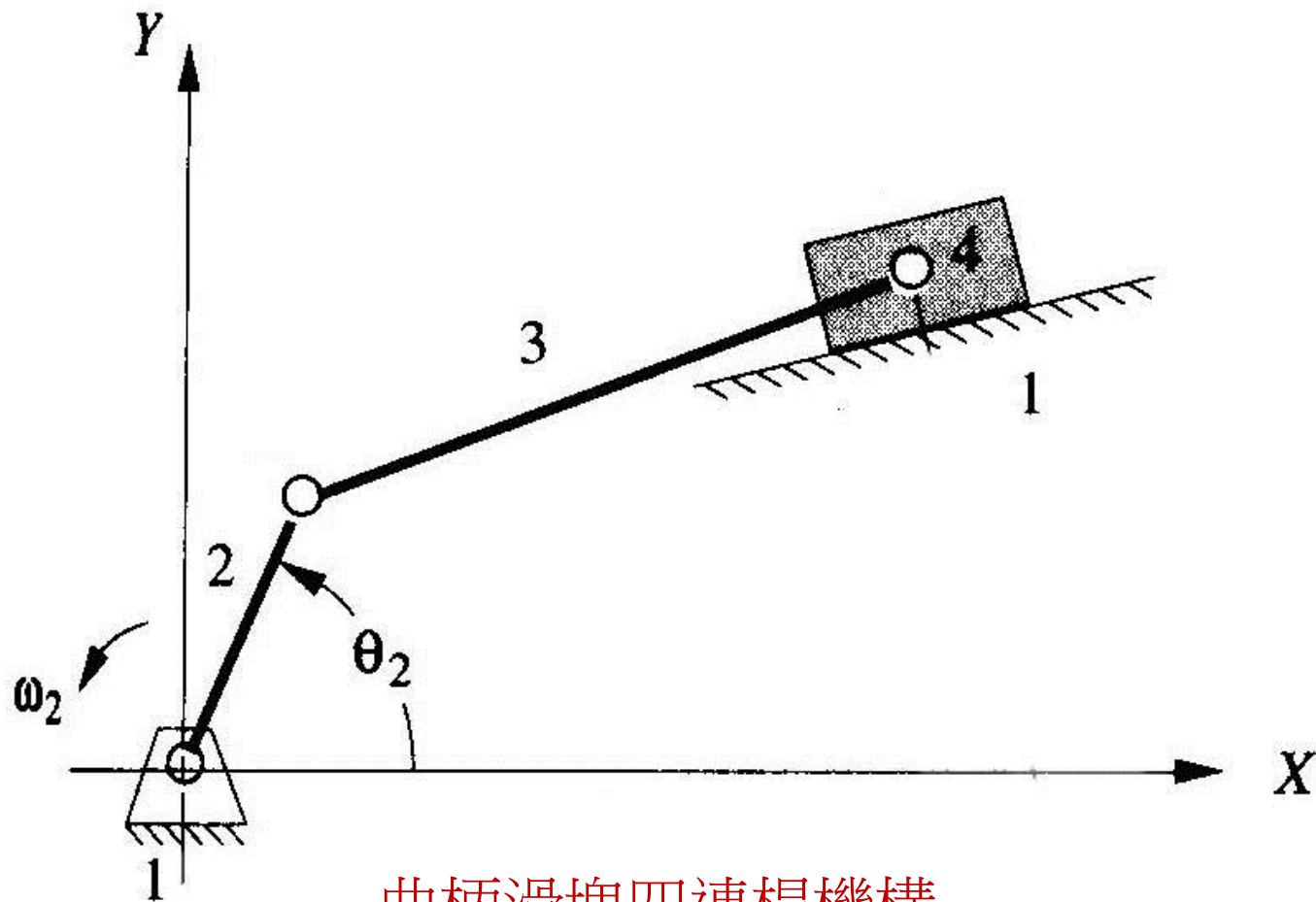
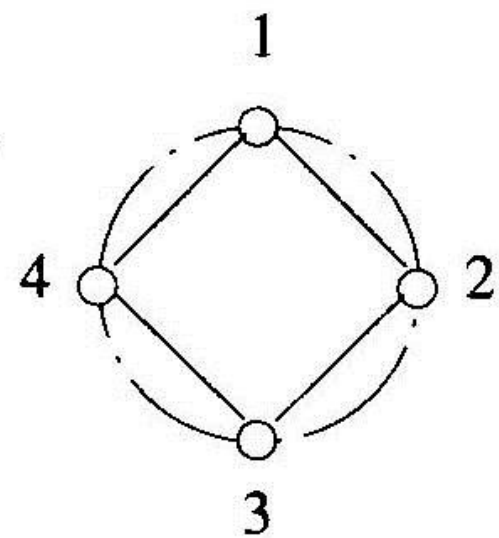
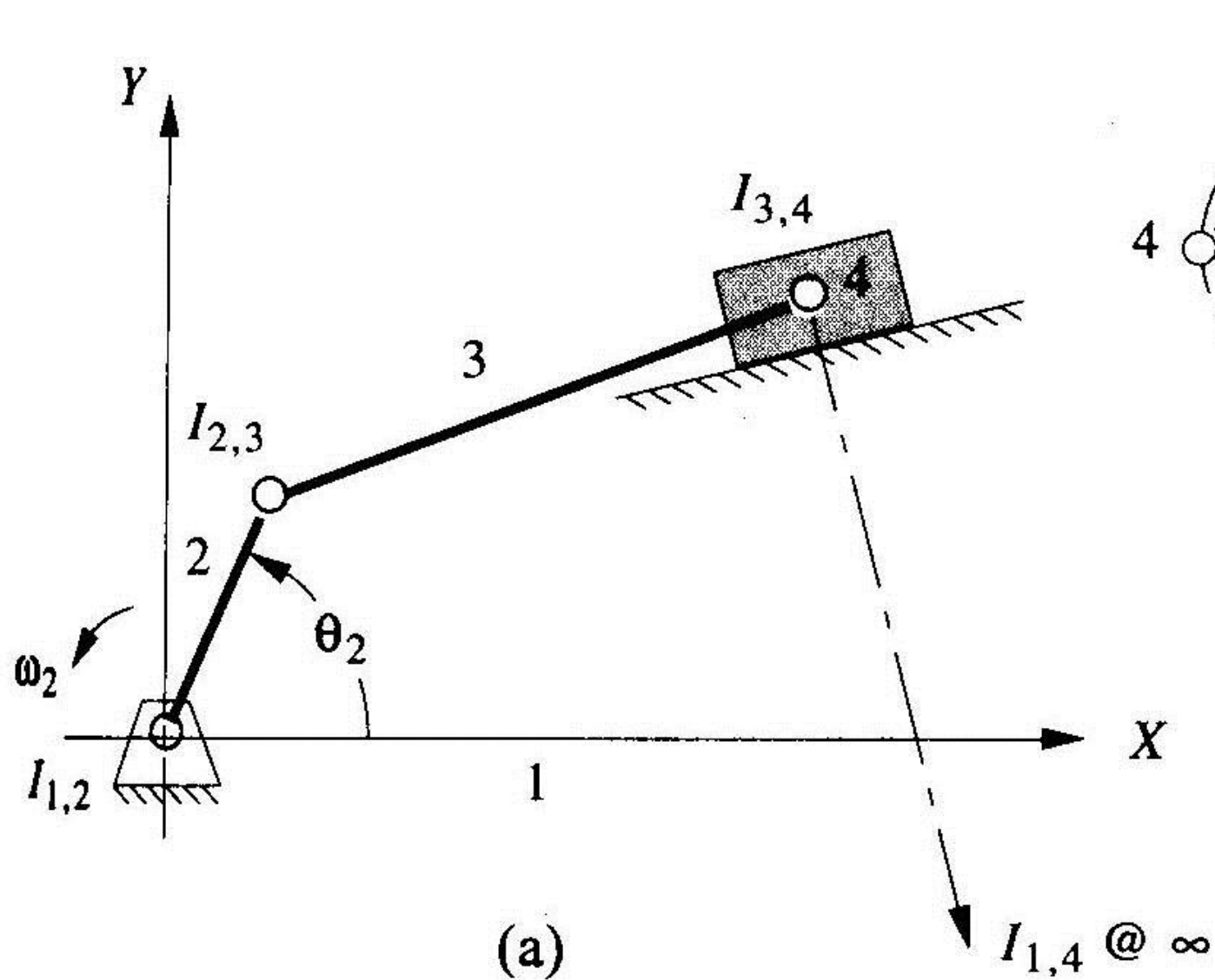


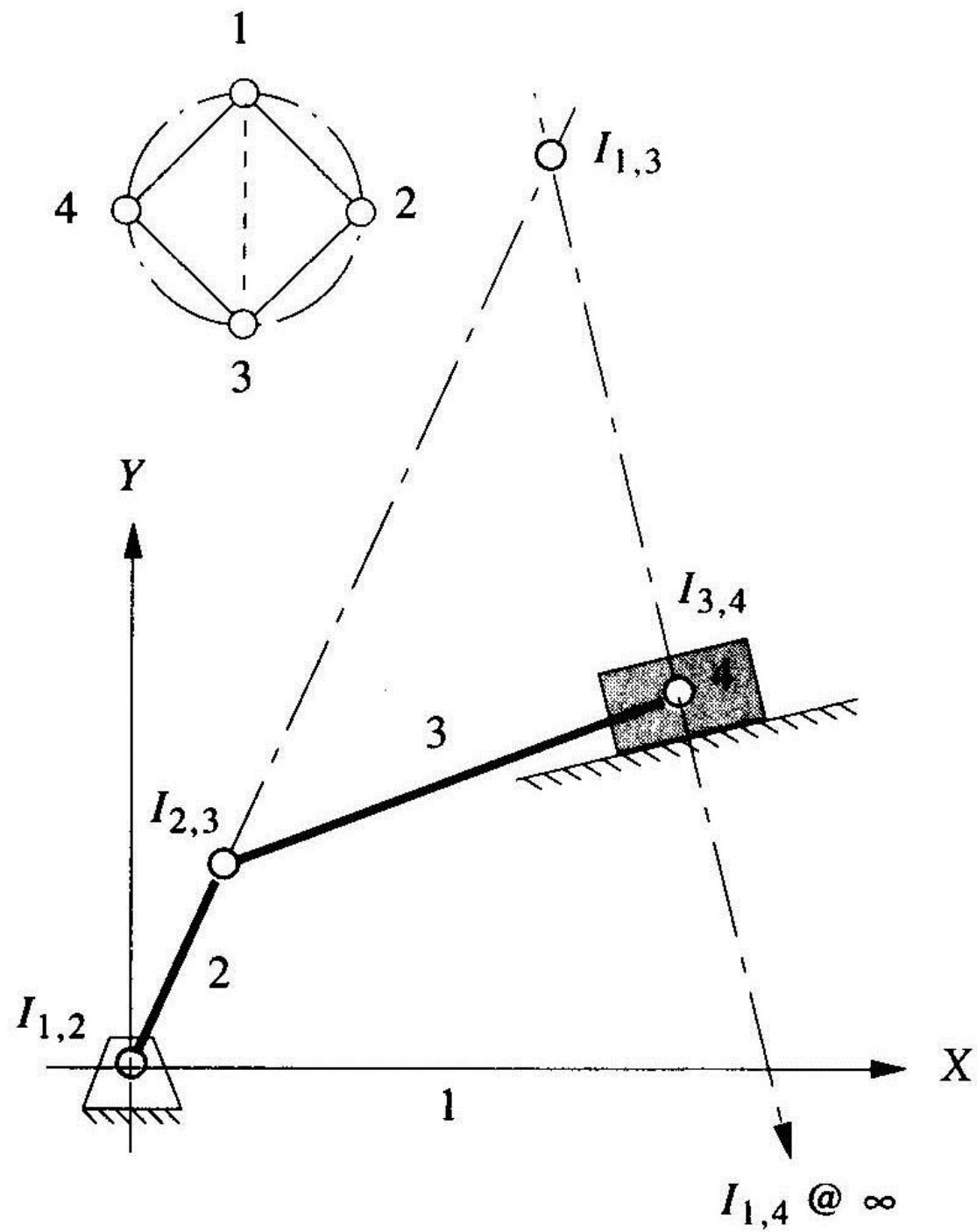
圖6.3 四連桿組[例6.1]

[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。

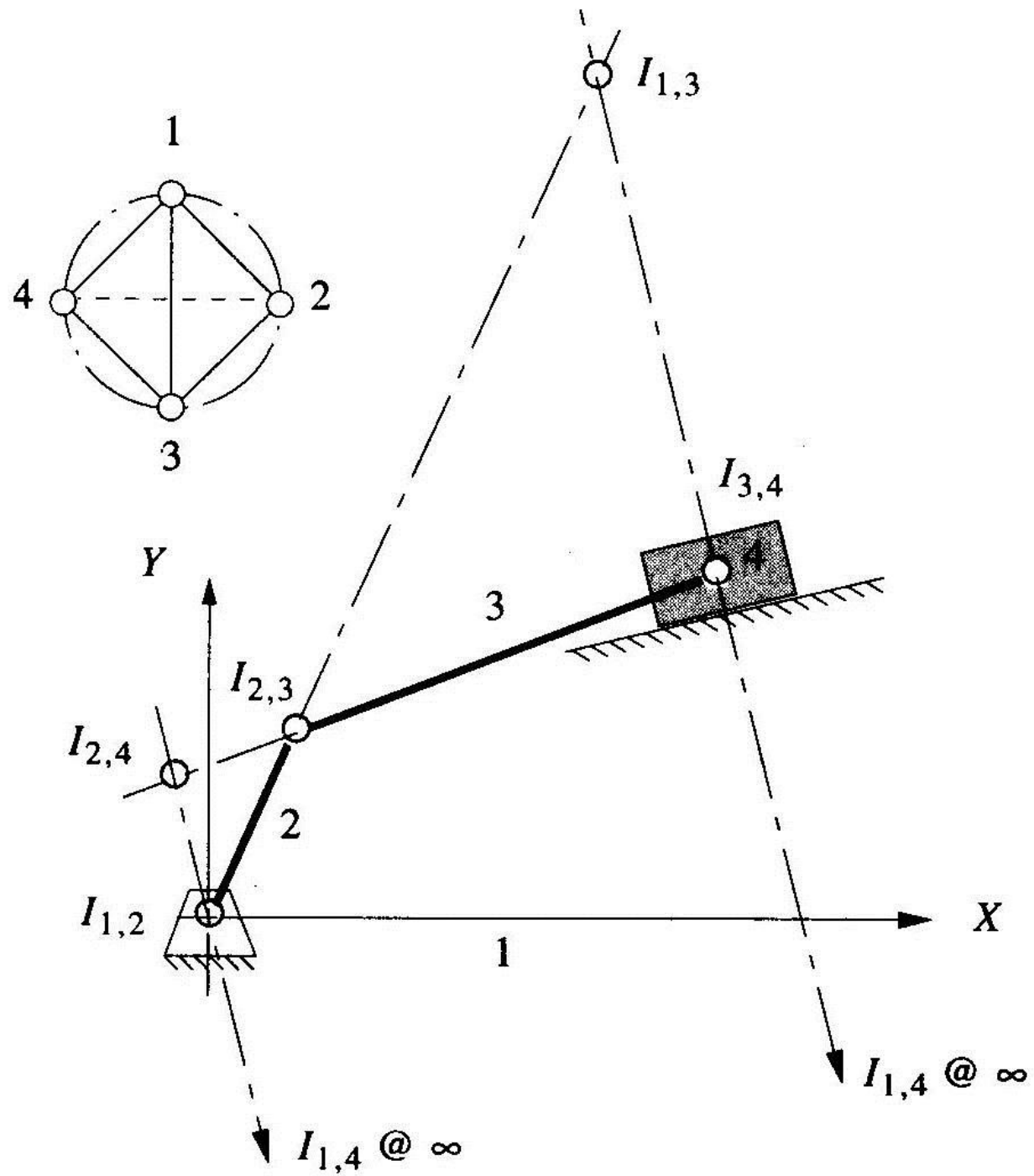


曲柄滑塊四連桿機構





(c)



[例6.2] 有一個四連桿機構，如圖6.4所示，  
試求此機構在這個位置的瞬心位置。

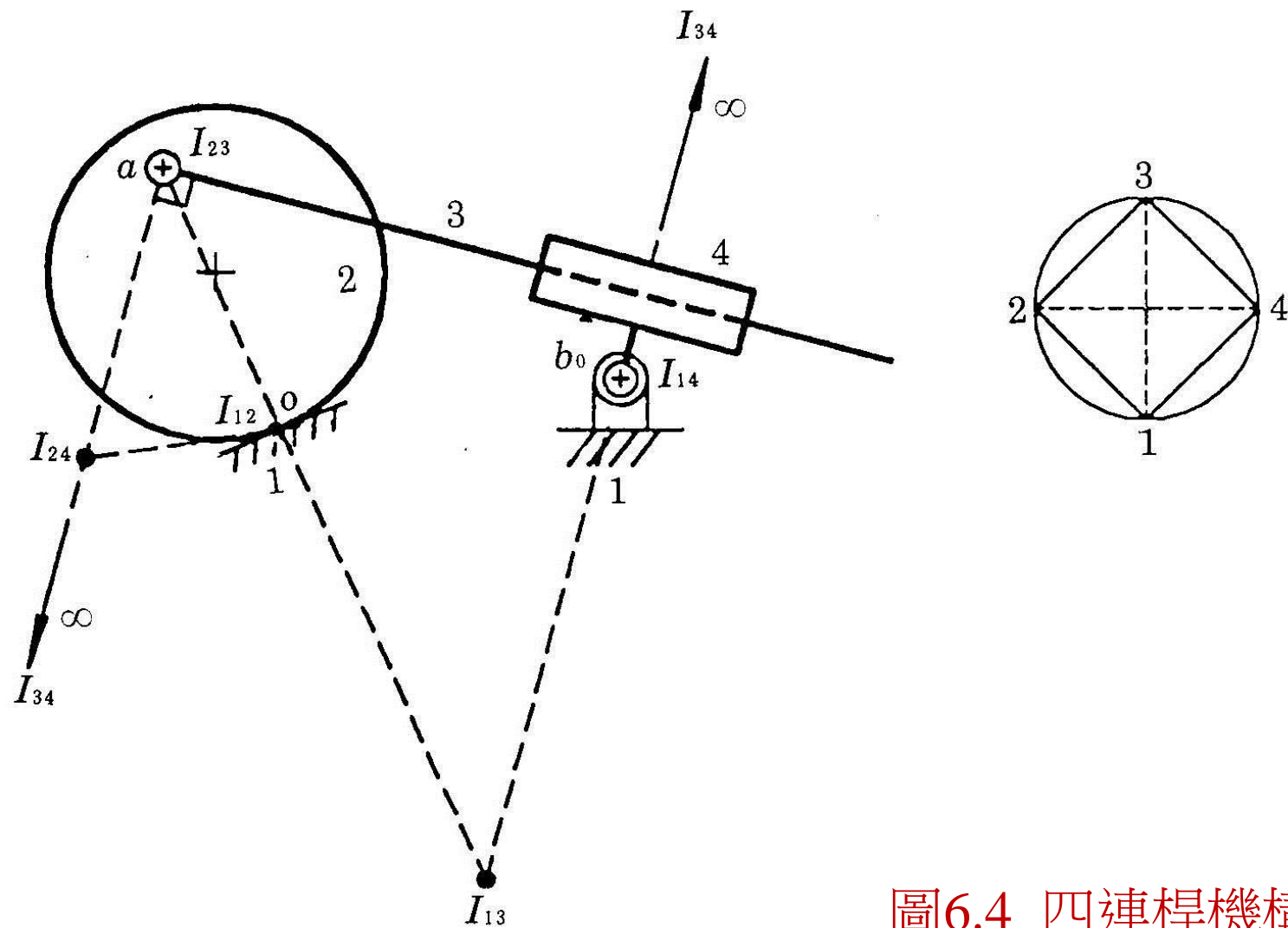
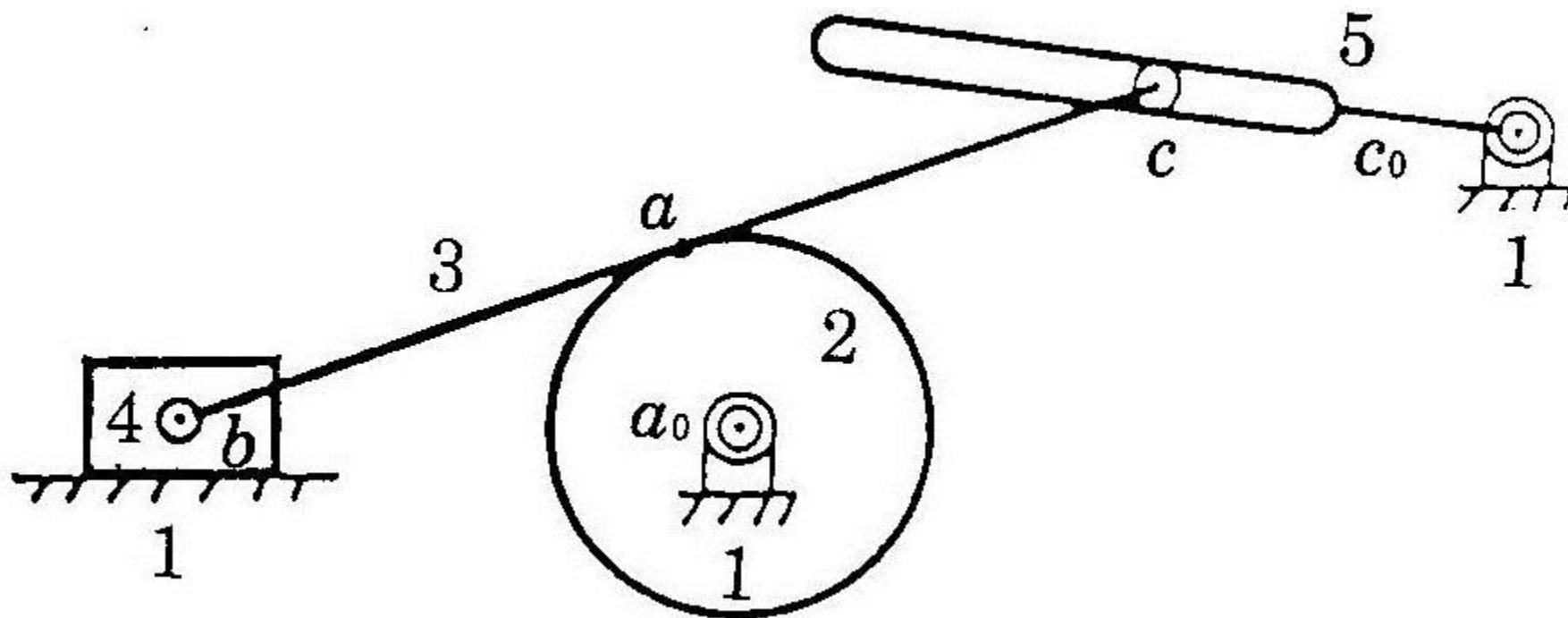
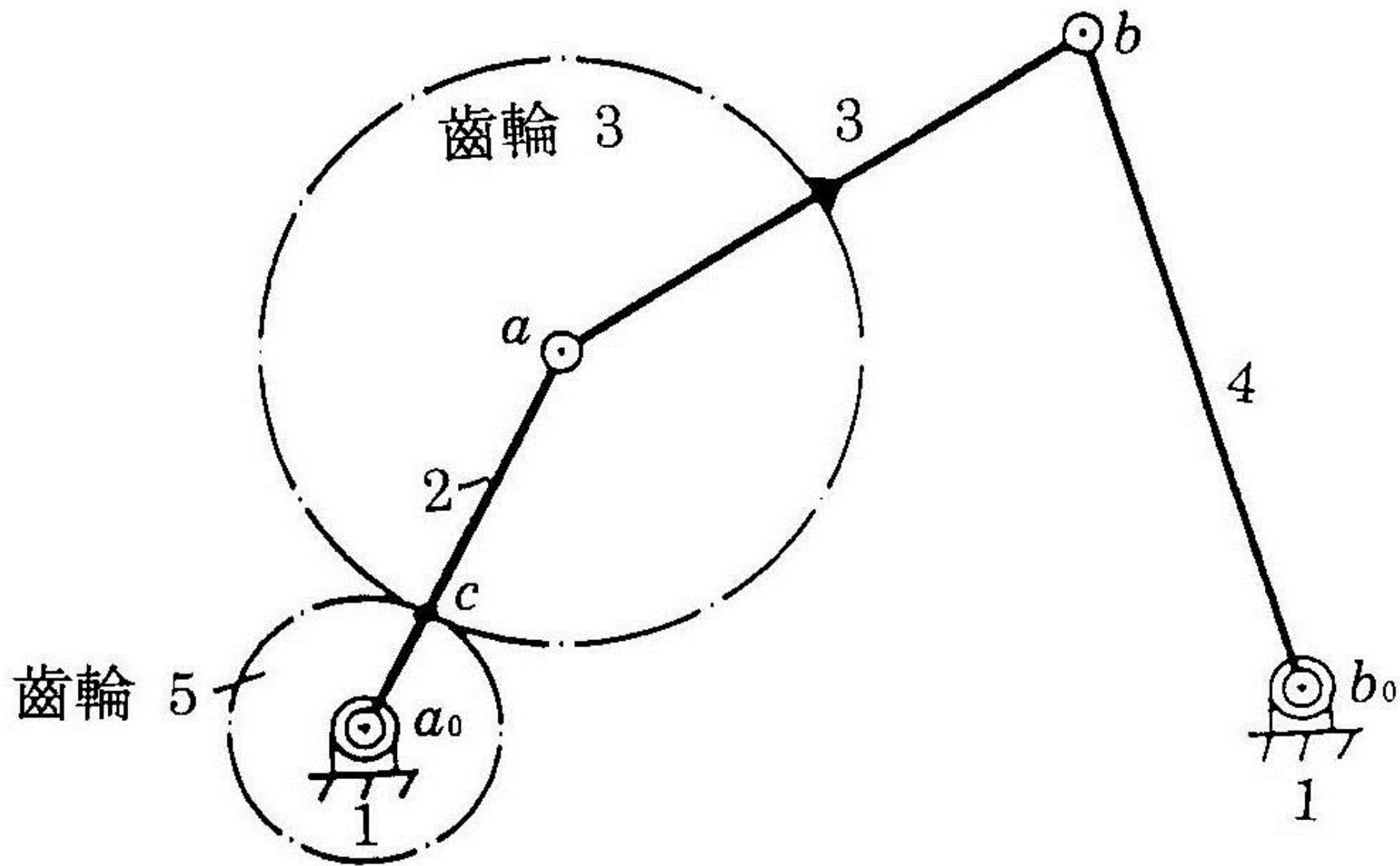


圖6.4 四連桿機構[例6.2]

[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。



[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。

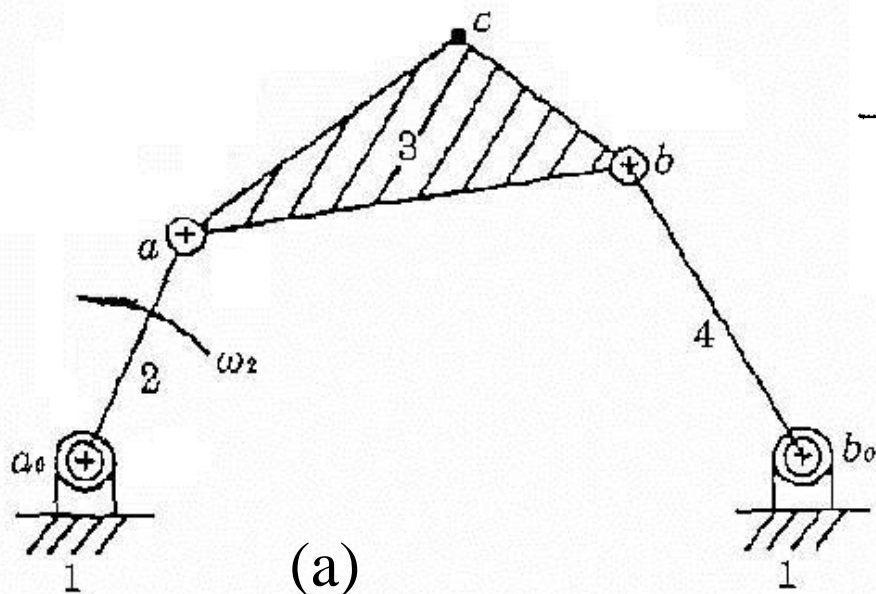




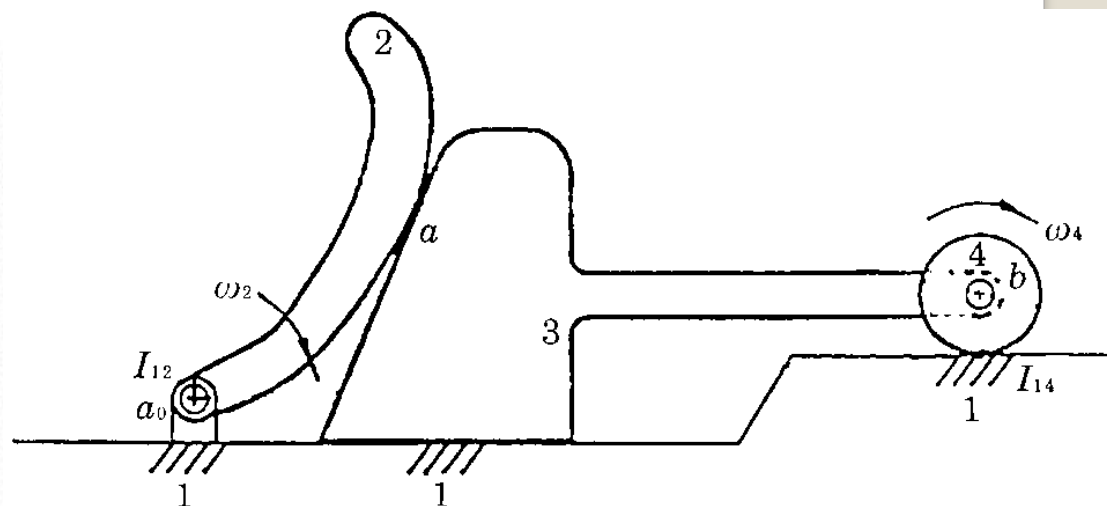
## 6-1-4 瞬心法速度分析

下列四連桿機構，如圖所示，（**1**）請求出其所有的瞬心位置。

（**2**）若桿**2**的角速度 $\omega_2$ 已知，試利用瞬心法求圖**(a)**中桿**3**上耦點**C**的線速度 $\mathbf{V}_3$ ，及圖**(b)**之桿**4**的角速度 $\omega_4$ 。



(a)



四連桿機構

(b)

### [例6.3]

若桿2的角速度 $\omega_2$ 已知，試利用瞬心法求桿3上耦點c的線速度 $V_c$ 。

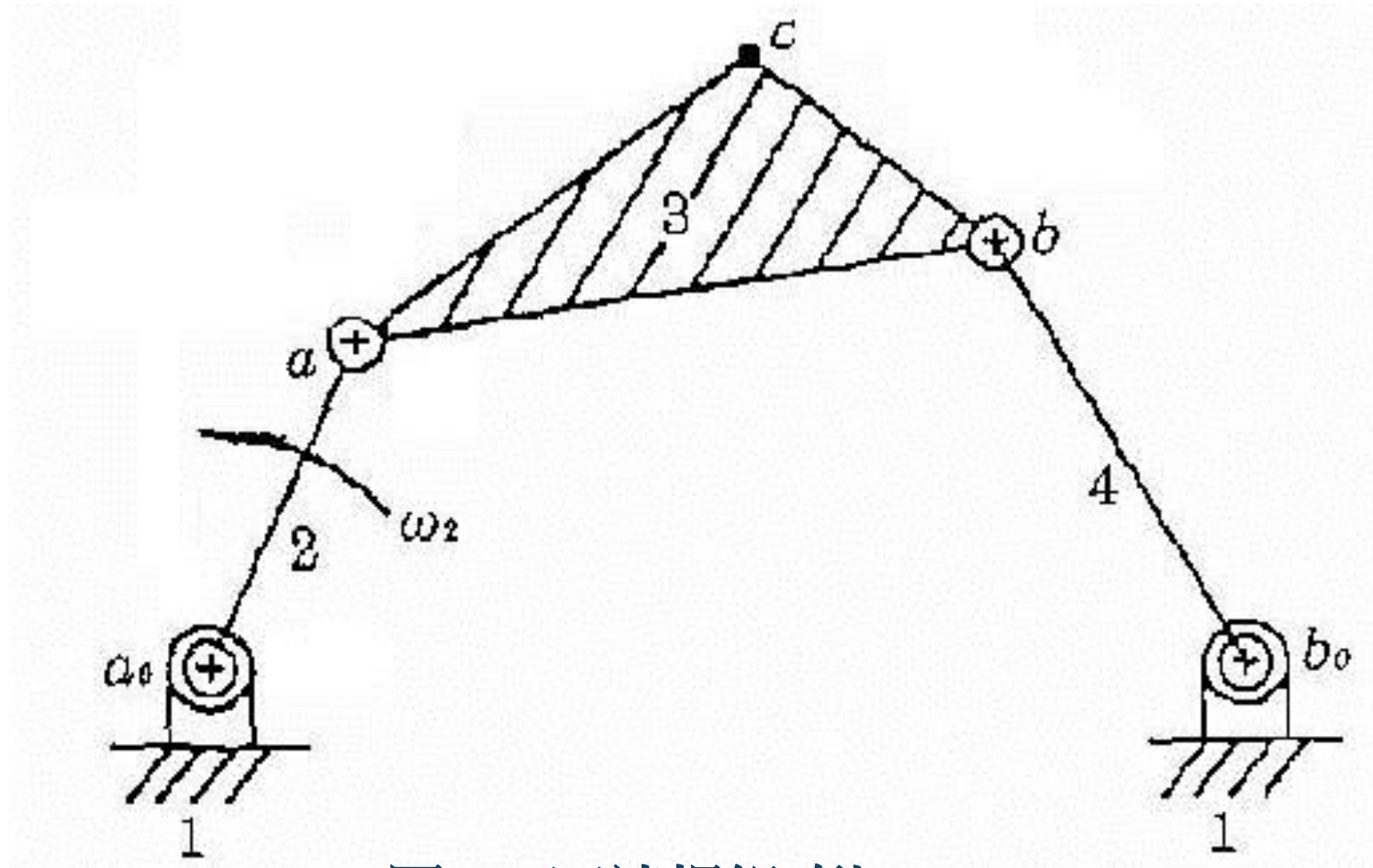


圖6.5 四連桿組[例6.3]

## 6-1-4 瞬心法速度分析

### 6-1-4 瞬心法速度分析

[例6.3] 若桿2的角速度 $\omega_2$ 已知，試利用瞬心法求桿3上耦點c的線速度 $V_c$ 。

$$V_{23} = \omega_2(I_{23}I_{12})$$

$$V_{23} = \omega_3(I_{23}I_{13})$$

$$\omega_3 = \omega_2(I_{23}I_{12} / I_{23}I_{13})$$

$$V_c = \omega_3(cI_{13})$$

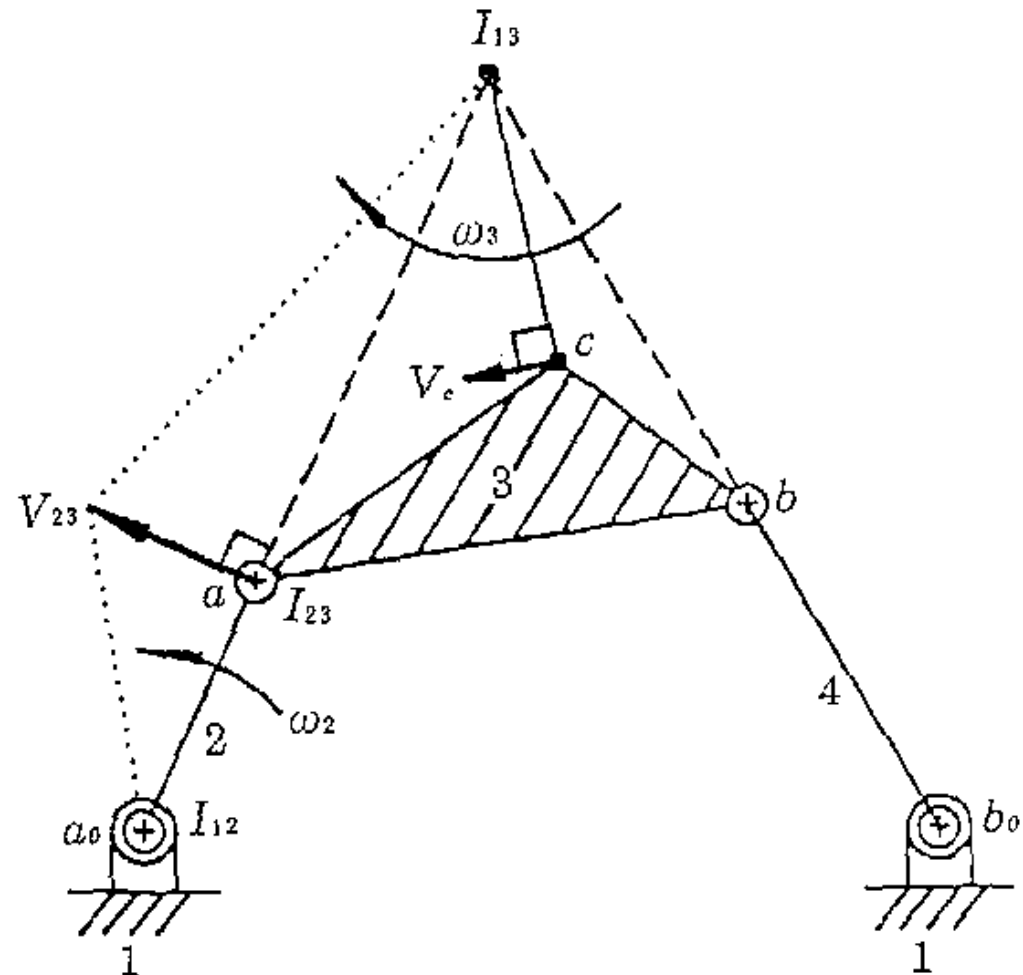
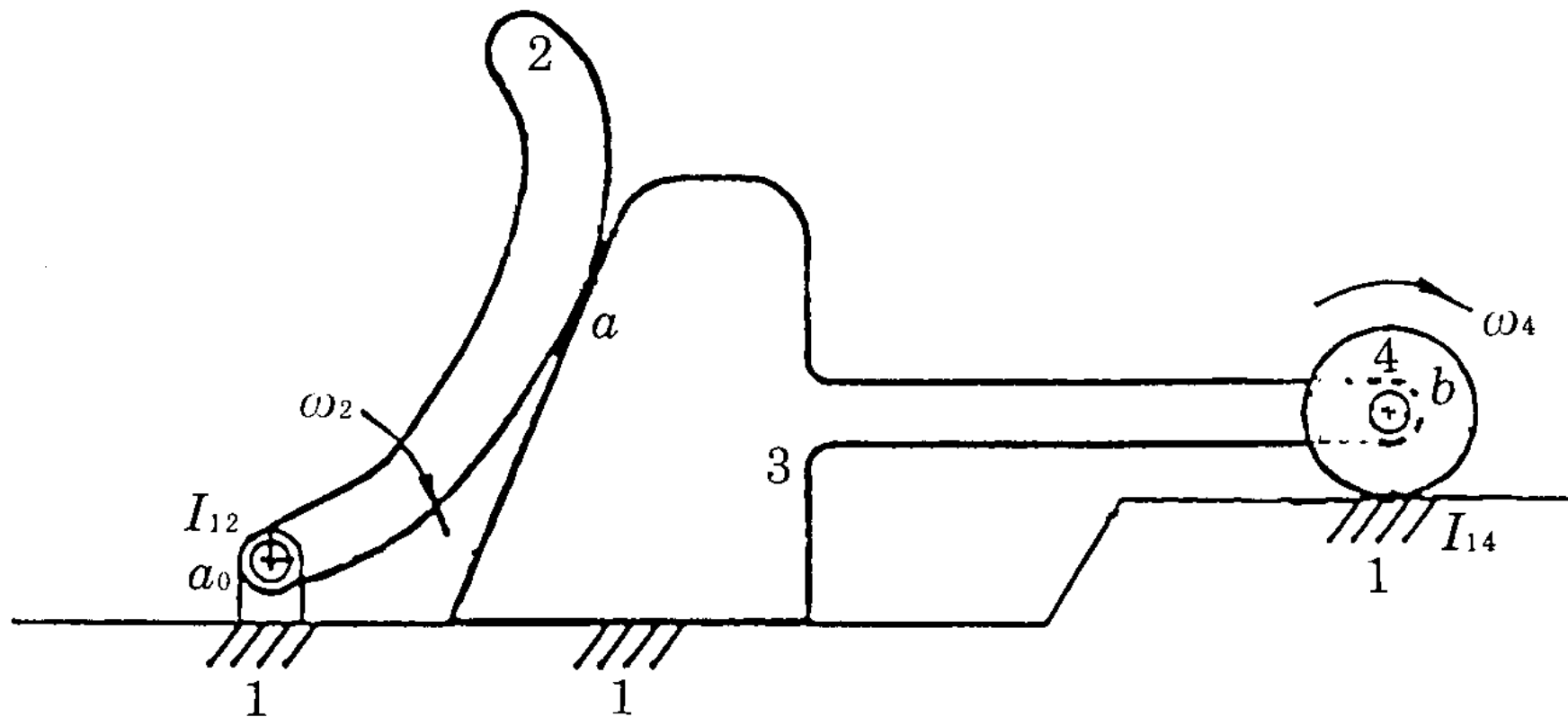


圖6.5 四連桿組[例6.3]

## 6-1-4 瞬心法速度分析

[例6.4] 若桿2的角速度 $\omega_2$ 已知，試利用瞬心法求桿4的角速度 $\omega_4$ 。



四連桿機構

## 6-1-4 瞬心法速度分析

[例6.4] 若桿2的角速度 $\omega_2$ 已知，試利用瞬心法求桿4的角速度 $\omega_4$ 。

$$V_{24} = \omega_2(I_{24} I_{12}) = \omega_4(I_{24} I_{14})$$

$$\omega_4 = \omega_2(I_{24} I_{12} / I_{24} I_{14})$$

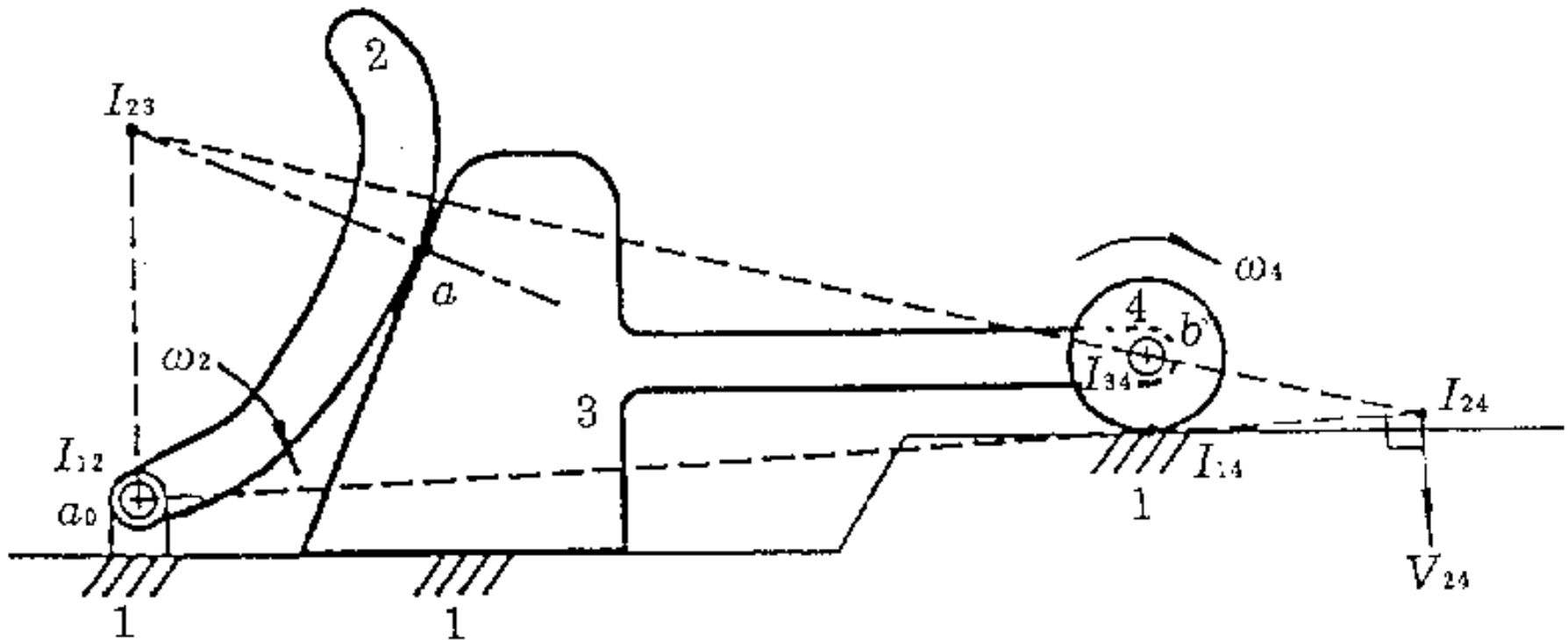


圖6.6 四連桿機構[例6.4]