

運動分析

分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係

Ch5：位置分析

Ch6：速度分析

Ch7：加速度分析

機構設計的工作內容

機構設計

機構分析

構造分析

分析已有機構
的可動性

運動分析

分析已有機構
的運動狀態

機構合成

構造成合

運動合成

分析已有機構的機構拓
樸構造和可動性

1. 畫出機構簡圖

2. 寫出機構拓樸
構造矩陣

3. 判定機構可動性

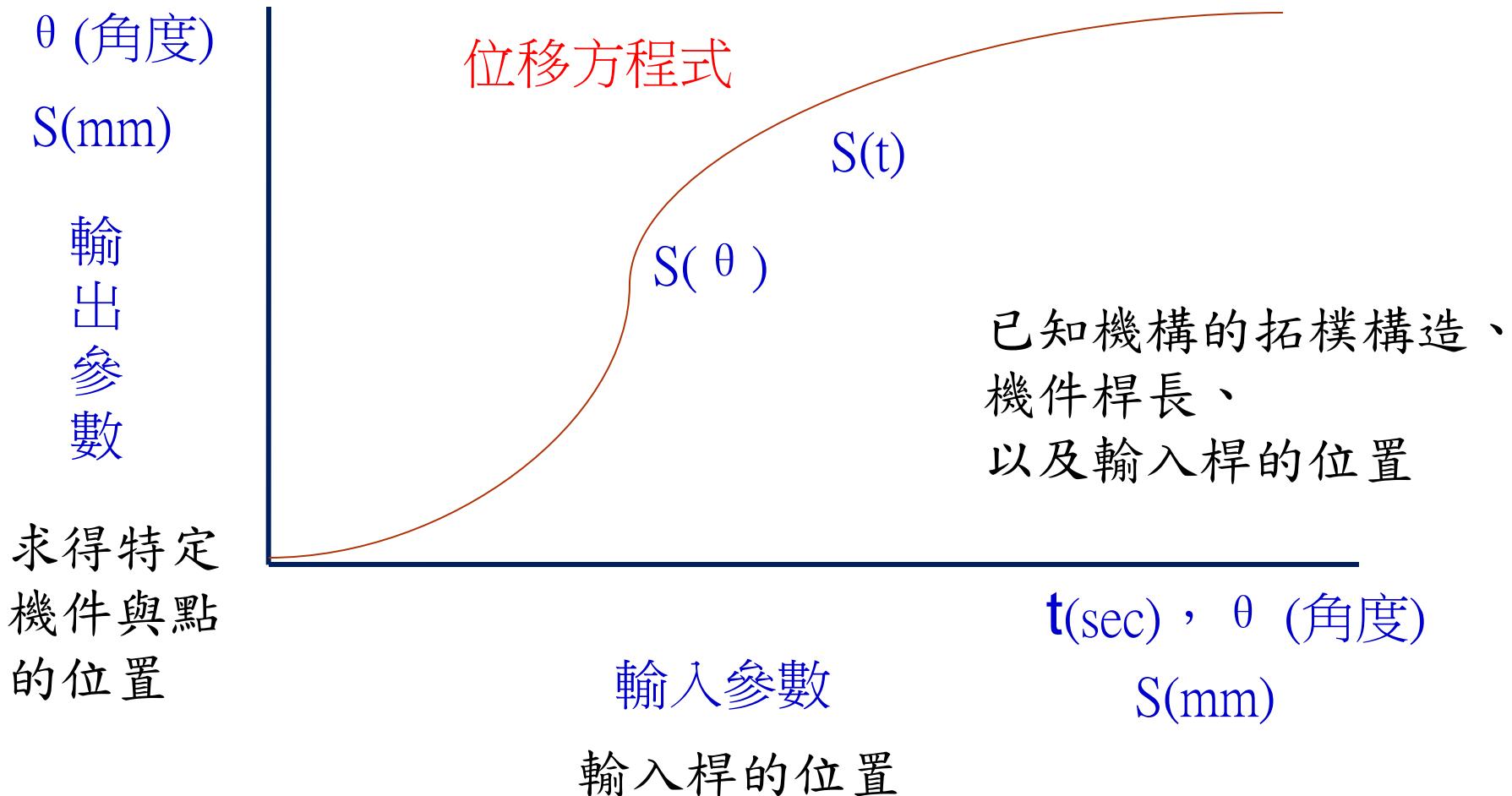
1. 位置分析

2. 速度分析

3. 加速度分析

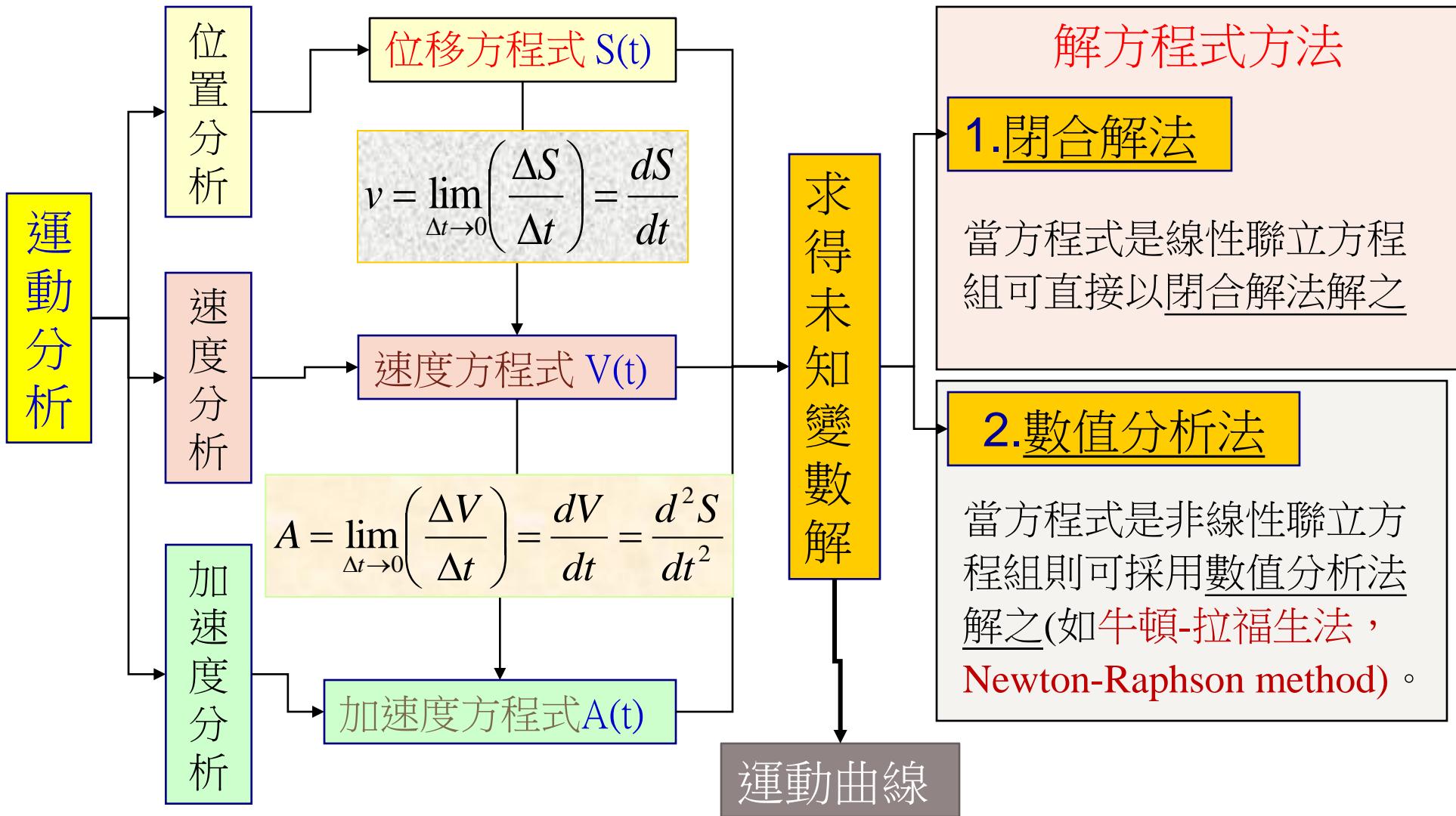
分析已有
機構之輸
入與輸出
的運動狀
態關係。

運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



(位置分析 → 位移方程式 $S(t)$ → 位移曲線)

運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係

Ch5:位置分析 → 位移方程式 $S(t)$ → 位移曲線

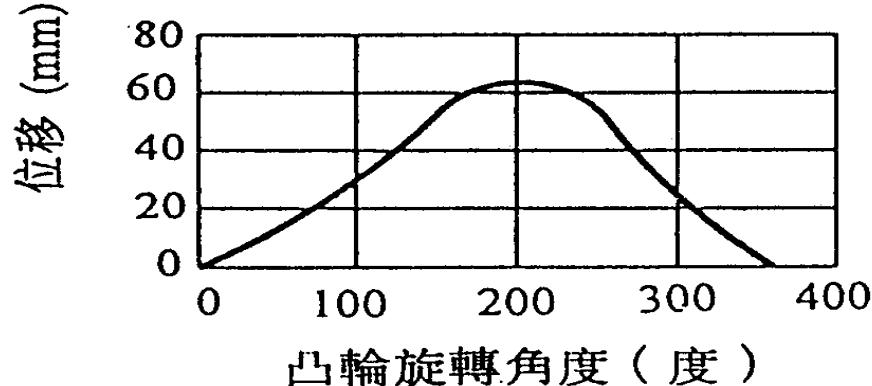
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta S}{\Delta t} \right) = \frac{dS}{dt}$$

Ch6:速度分析 → 速度方程式 $V(t)$ → 速度曲線

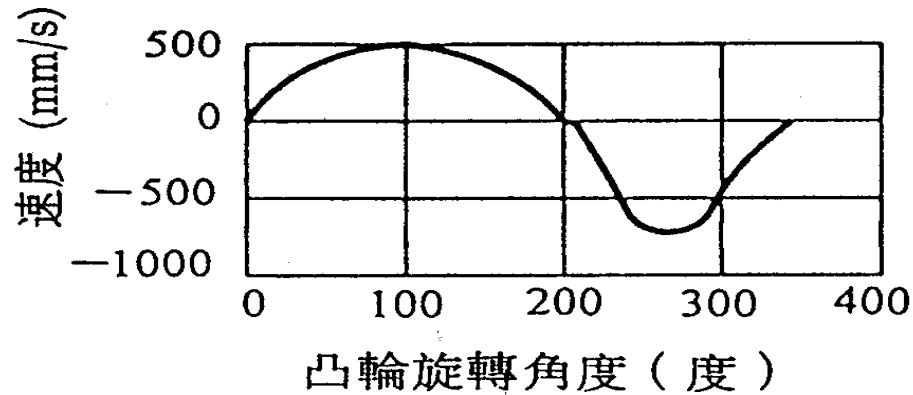
$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta t} \right) = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Ch7:加速度分析 → 加速度方程式 $A(t)$ → 加速度曲線

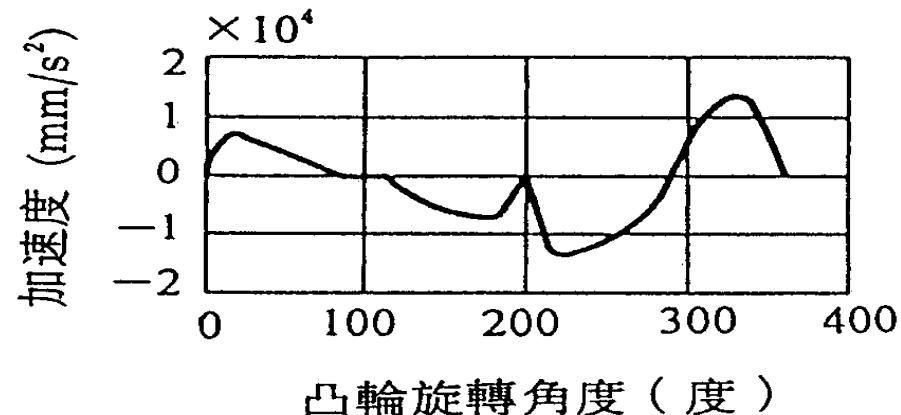
運動分析:分析已有機構之輸入與輸出的運動狀態關係



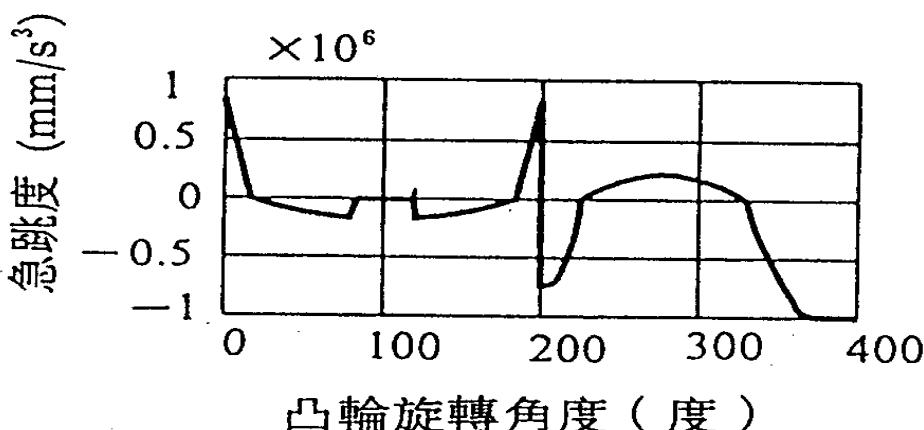
(a)位移曲線



(b)速度曲線



(c)加速度曲線



(d)急跳度曲線

圖9.18 從動件運動曲線圖

運動分析課程內容重點

Ch5:位置分析

- 向量迴路法

Ch6:速度分析

- 瞬心法
 - 瞬心的定義
 - 三心定理
 - 瞬心的求法
 - 瞬心法速度分析

- 向量迴路法

Ch7:加速度分析

- 向量迴路法

Ch9-10:直接接觸傳動

- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

• Ch10:齒輪系 Gear train

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

運動分析課程內容重點

• 向量迴路法

- Ch5:位置分析(以連桿機構為例)
- Ch6:速度分析
- Ch7:加速度分析

• 瞬心法速度分析

- Ch6:瞬心的定義與求法
- Ch9-10:直接接觸傳動
- Ch10:齒輪系轉速比

速度分析課程內容重點

- 瞬心法速度分析

- 瞬心的定義
- 三心定理
- 瞬心的求法
- 瞬心法速度分析

Ch9-10:直接接觸傳動

- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

• Ch10:齒輪系 Gear train

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

第六章 速度分析Velocity analysis

- ◎根據已知輸入機件之速度及已完成的位置分析，藉由適當的方法，來求得輸出機件之速度及特定點的線速度。
- ◎在機構與機器設計中，速度(Velocity)扮演一個重要的角色，有相當多的用途，如加速度分析、動力分析、運動能量、摩擦力方向、運動的相對路徑、等值質量或慣性矩、虛功原理、動量守恒原理、機械利益、...等，皆需要速度分析。
- ◎分析機構桿件與點之速度的方法不少，本章介紹瞬心法、相對速度法、以及易於電腦化的向量迴路法。

6-2 相對速度法Relative velocity method

- ◎利用瞬心法，雖然可很直接的求得特定機件之角速度或其上重要點的線速度，但卻無法直接用來進行加速度分析。
- ◎以相對速度(Relative velocity)的概念來進行機構的速度分析，常作速度多邊形(Velocity polygon)來輔助。

- ◎點a的速度(方向與oa垂直)為：

$$\vec{V}_a = \vec{\omega} \times \overrightarrow{oa}$$

- 點b的速度(方向與ob垂直)為：

$$\vec{V}_b = \vec{\omega} \times \overrightarrow{ob}$$

- 點b相對於點a的速度為：

$$\vec{V}_{ba} = \vec{V}_b - \vec{V}_a$$

- 方向與ba垂直。

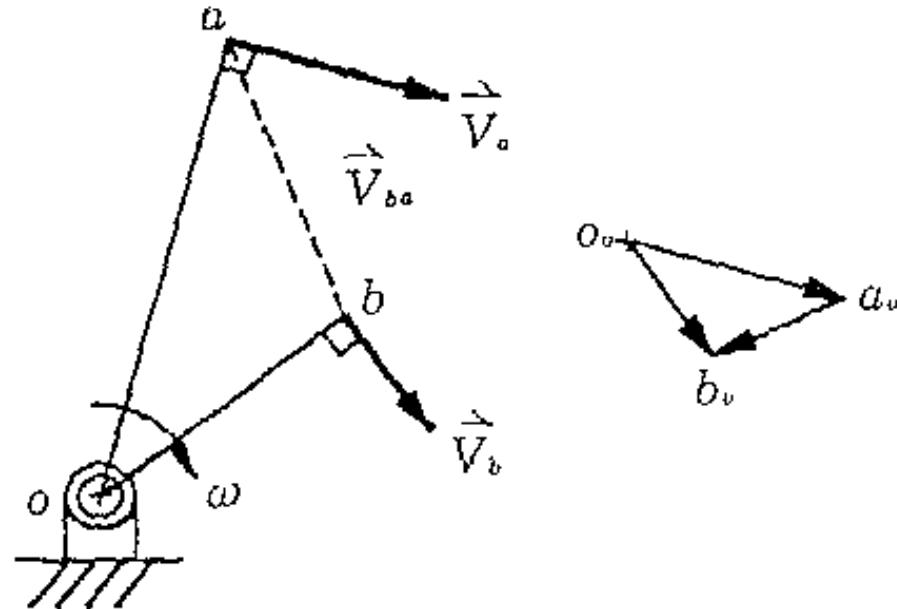


圖6.7 相對速度

[例6.5]有一個滑件曲柄機構， $a_0a=10\text{cm}$ ， $ab=30\text{cm}$ ，若曲柄的角速度 $\omega_2=100\text{ rad/sec}$ (反時針方向)，試利用相對速度法求連接桿之角速度 ω_3 及滑件的線速度 V_4 。

1. $V_a=\omega_2(a_0a)=100\times10=1,000\text{ cm/sec}$ 。

2. $\vec{V}_b = \vec{V}_a + \vec{V}_{ba}$

D✓ D✓ D✓

M? M✓ M?

3. 取速度比例 $k_v=400$ ， $1\text{cm}=400\text{cm/sec}$ 。

量得 $o_v b_v=2.5\text{cm}$ ， $a_v b_v=1.31\text{cm}$ 。

4. $V_{ba}=k_v \times a_v b_v=400 \times 1.31=524\text{cm/sec}$ ，
 $\omega_3=V_{ba}/ba=524/30=17.5\text{rad/sec (c.w.)}$ 。

5. $V_4=V_b=k_v \times o_v b_v=400 \times 2.5=1,000\text{cm/sec}$ 。

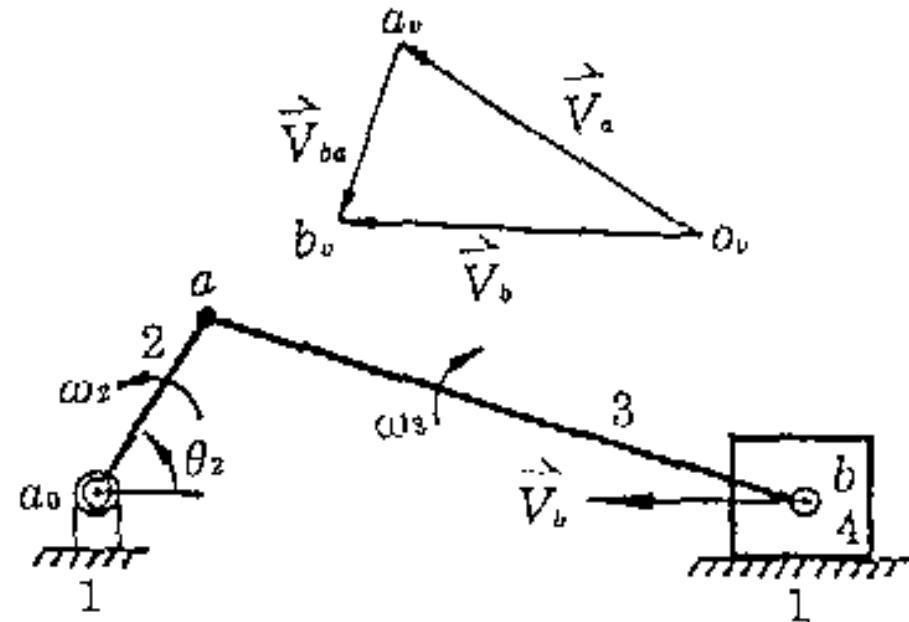


圖6.8 滑件曲柄機構[例6.5]

[例6.6]若滾子(機件2)的角速度 ω_2 為已知，試利用相對速度法求搖臂(機件4)的角速度 ω_4 。

$$\vec{V}_{b_4} = \vec{V}_{b_2} + \vec{V}_{b_4 b_2}$$

$$\begin{matrix} D\checkmark & D\checkmark & D\checkmark \\ M? & M\checkmark & M? \end{matrix}$$

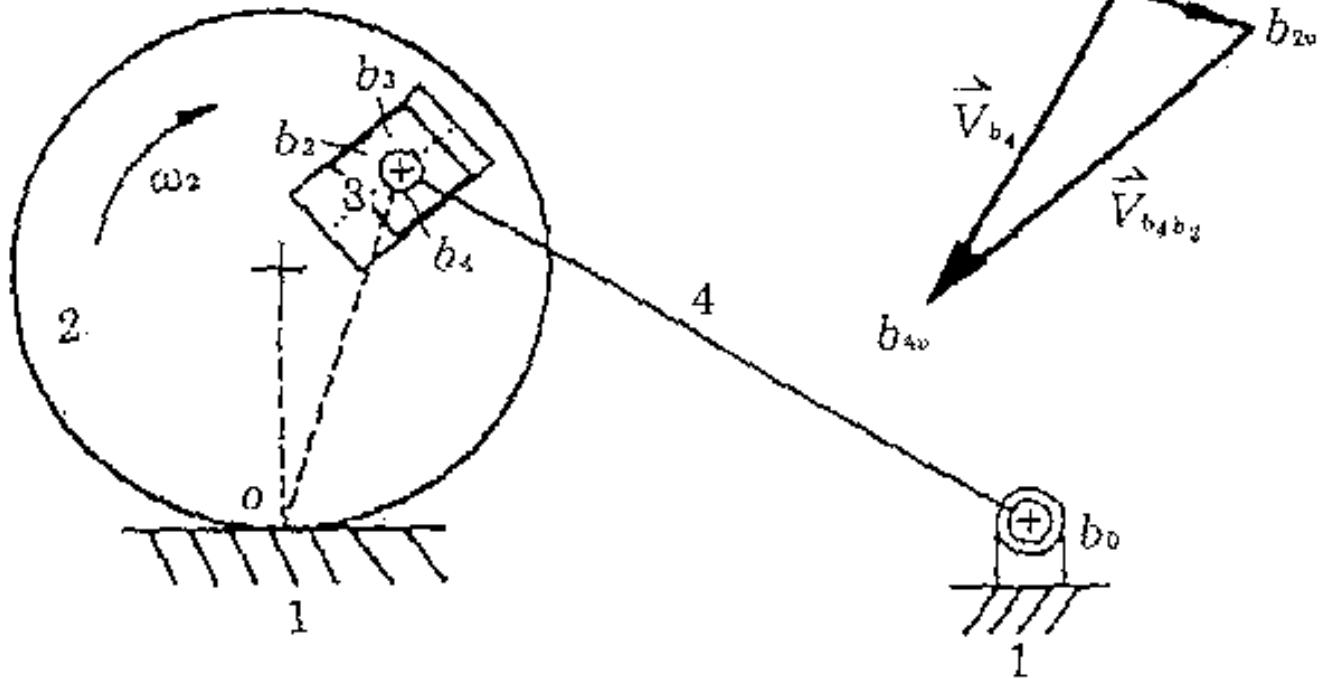


圖6.9 四連桿機構[例6.6]

6-3 向量迴路法 Vector loop method

◎利用向量迴路法可推導出機構的位移方程式，將位移方程式對時間微分一次，可得到一組線性的聯立方程式，即速度方程式(Velocity equation)，解此聯立方程式即可得到各桿件的角速度，據此可推導出各桿件上重要點的線性速度。

[例6.7] 為已知，試利用向量迴路法求桿3的角速度與滑件4的速度。

$$\vec{r}_2 + \vec{r}_3 - \vec{r}_4 - \vec{r}_1 = 0 \quad (6-1)$$

$$r_2 \cos \theta_2 + r_3 \cos \theta_3 - r_4 = 0 \quad (6-2)$$

$$r_2 \sin \theta_2 + r_3 \sin \theta_3 + r_1 = 0 \quad (6-3)$$

在 $\theta_2=60^\circ$ 時， $\theta_3=316.9^\circ$ ， $r_4=3.922$ cm。

$$(-r_3 \sin \theta_3) \dot{\theta}_3 + (-1) \dot{r}_4 = r_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (6-4)$$

$$(r_3 \cos \theta_3) \dot{\theta}_3 + (0) \dot{r}_4 = -r_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \quad (6-5)$$

$$\dot{\theta}_3 = -\left(\frac{r_2}{r_3}\right)\left(\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3}\right) \dot{\theta}_2 \quad (6-6)$$

$$\dot{r}_4 = -r_2 (\sin \theta_2 - \cos \theta_2 \tan \theta_3) \dot{\theta}_2 \quad (6-7)$$

在 $\theta_2=60^\circ$ 時：

$$\dot{\theta}_3 = -0.342 \dot{\theta}_2 \quad \dot{r}_4 = -2.666 \dot{\theta}_2$$

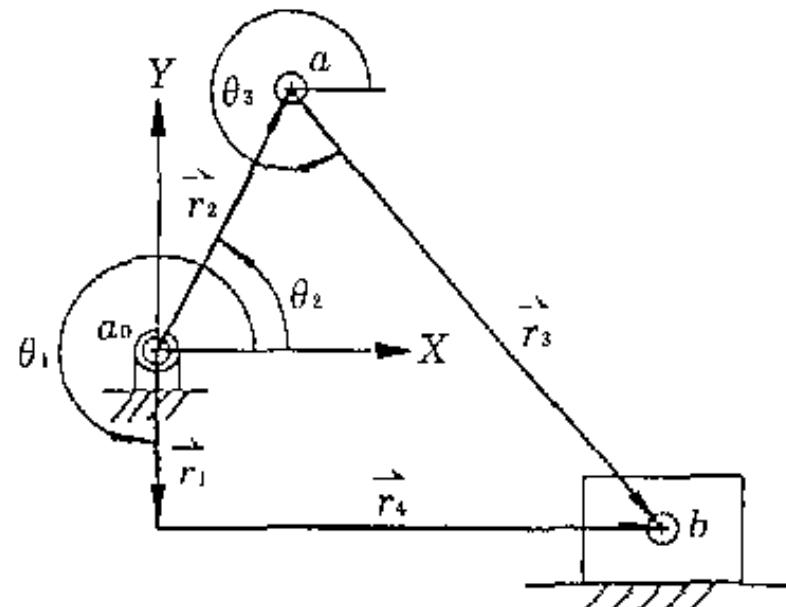


圖6.10 滑件曲柄機構[例6.7]

[例6.8] $\omega_2=10\text{rad/sec}$ (反時針方向)，試利用向量迴路法進行速度分析。

$$36 \cos \theta_3 + 14 \cos \theta_4 - 50 \cos \theta_5 = 50 \quad (6-8)$$

$$36 \sin \theta_3 + 14 \sin \theta_4 - 50 \sin \theta_5 = 0 \quad (6-9)$$

$$1.5\theta_3 - \theta_4 = 0.5\theta_2 + 30^\circ \quad (6-10)$$

當 $\theta_2=30^\circ$ 時, $\theta_3=63.83^\circ$, $\theta_4=50.74^\circ$, $\theta_5=120.35^\circ$

$$(-36 \sin \theta_3)\omega_3 - (14 \sin \theta_4)\omega_4 + (50 \sin \theta_5)\omega_5 = 0$$

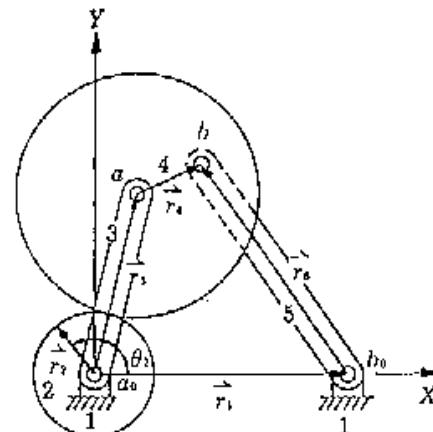
$$(36 \cos \theta_3)\omega_3 + (14 \cos \theta_4)\omega_4 - (50 \cos \theta_5)\omega_5 = 0$$

$$1.5\omega_3 - \omega_4 = 0.5\omega_2$$

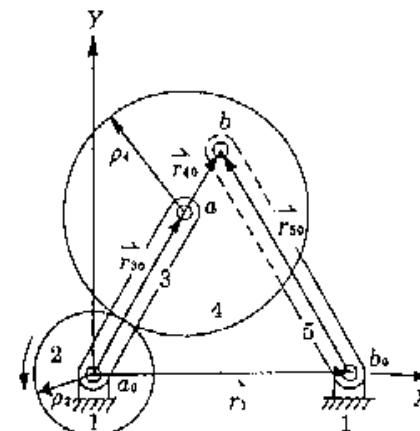
$$\omega_3 = 1.3199 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_4 = -3.0202 \text{ rad/sec}$$

$$\omega_5 = 0.2296 \text{ rad/sec}$$



(a)一般位置



(b)初始位置

圖6.11 齒輪五連桿機構[例5.8]

東華書局(YAN-hs/1999)

[例6.9]若 r_2 為已知，試利用向量迴路法求桿4的角速度 $\dot{\theta}_4$ 。

$$\theta_3 = \theta_4 + 90^\circ \quad (6-14)$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \vec{r}_4 = 0 \quad (6-15)$$

$$r_2 - r_3 \cos \theta_3 - r_4 \cos \theta_4 = 0 \quad (6-16)$$

$$r_1 - r_3 \sin \theta_3 - r_4 \sin \theta_4 = 0 \quad (6-17)$$

$$r_3 \sin \theta_4 - r_4 \cos \theta_4 = -r_2 \quad (6-18)$$

$$r_3 \cos \theta_4 + r_4 \sin \theta_4 = r_1 \quad (6-19)$$

$$(r_3 \cos \theta_4 + r_4 \sin \theta_4) \dot{\theta}_4 - (\cos \theta_4) \dot{r}_4 = -\dot{r}_2 \quad (6-20)$$

$$(r_3 \sin \theta_4 - r_4 \cos \theta_4) \dot{\theta}_4 - (\sin \theta_4) \dot{r}_4 = 0 \quad (6-21)$$

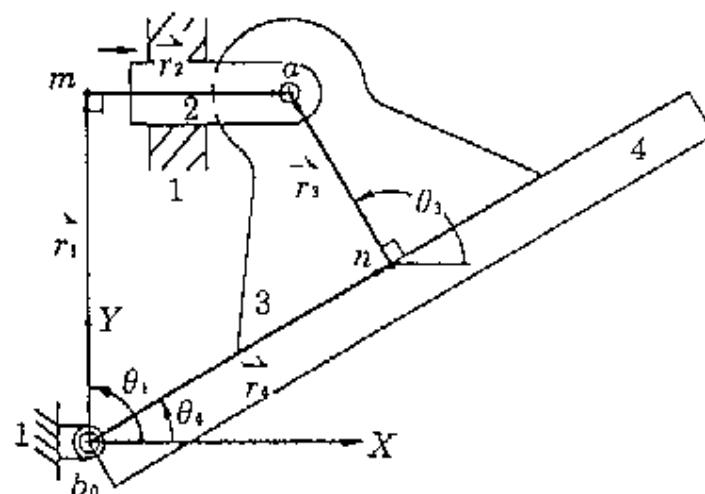


圖6.12 四連桿機構[例6.9]

聯立解式(6-20)和式(6-21)，可求得桿4的角速度為：

$$\dot{\theta}_4 = (-\sin \theta_4 / r_4) \dot{r}_2 \quad (6.22)$$

速度分析課程內容重點

■ 瞬心法速度分析

- 瞬心的定義
- 三心定理
- 瞬心的求法
- 瞬心法速度分析

Ch9-10:直接接觸傳動

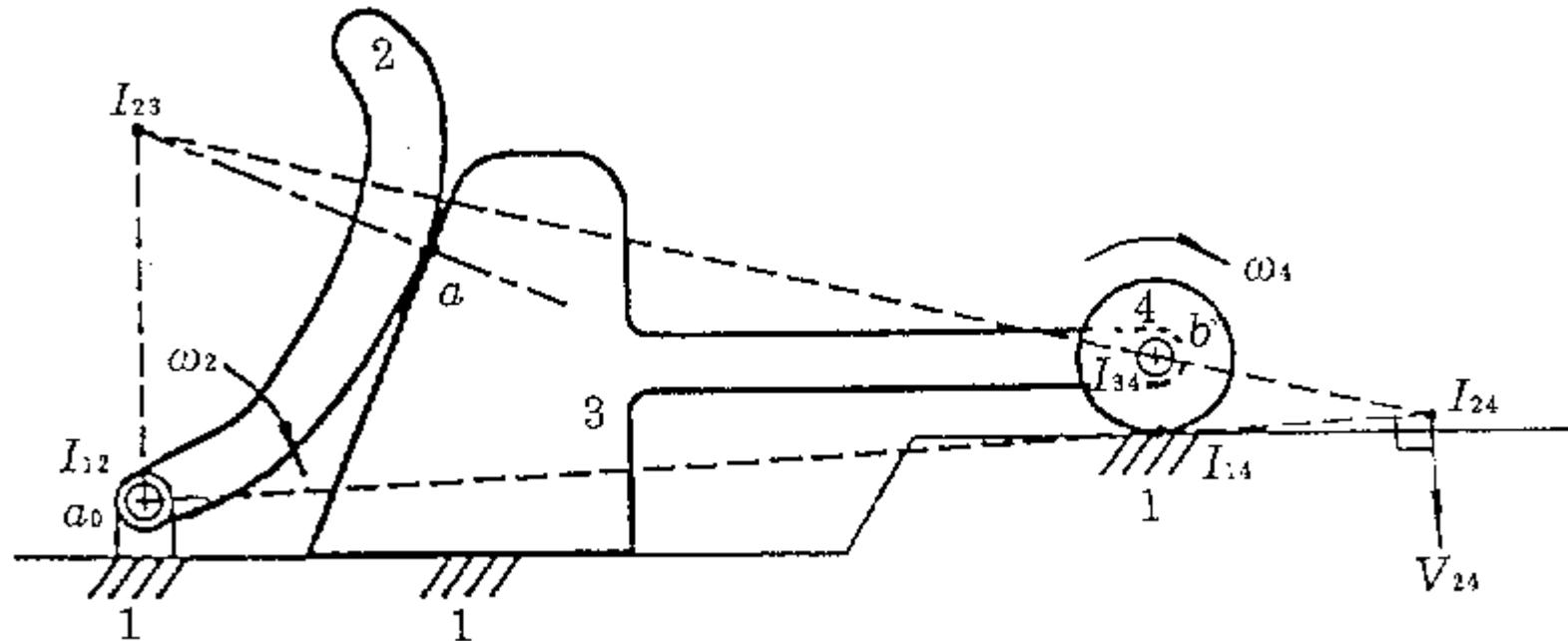
- 凸輪傳動 (共軛嚙合原理)
- 齒輪傳動原理
- 轉速比
- 作用線與壓力角

• Ch10:齒輪系 Gear train

- 普通輪系轉速比
- 周轉齒輪系轉速比

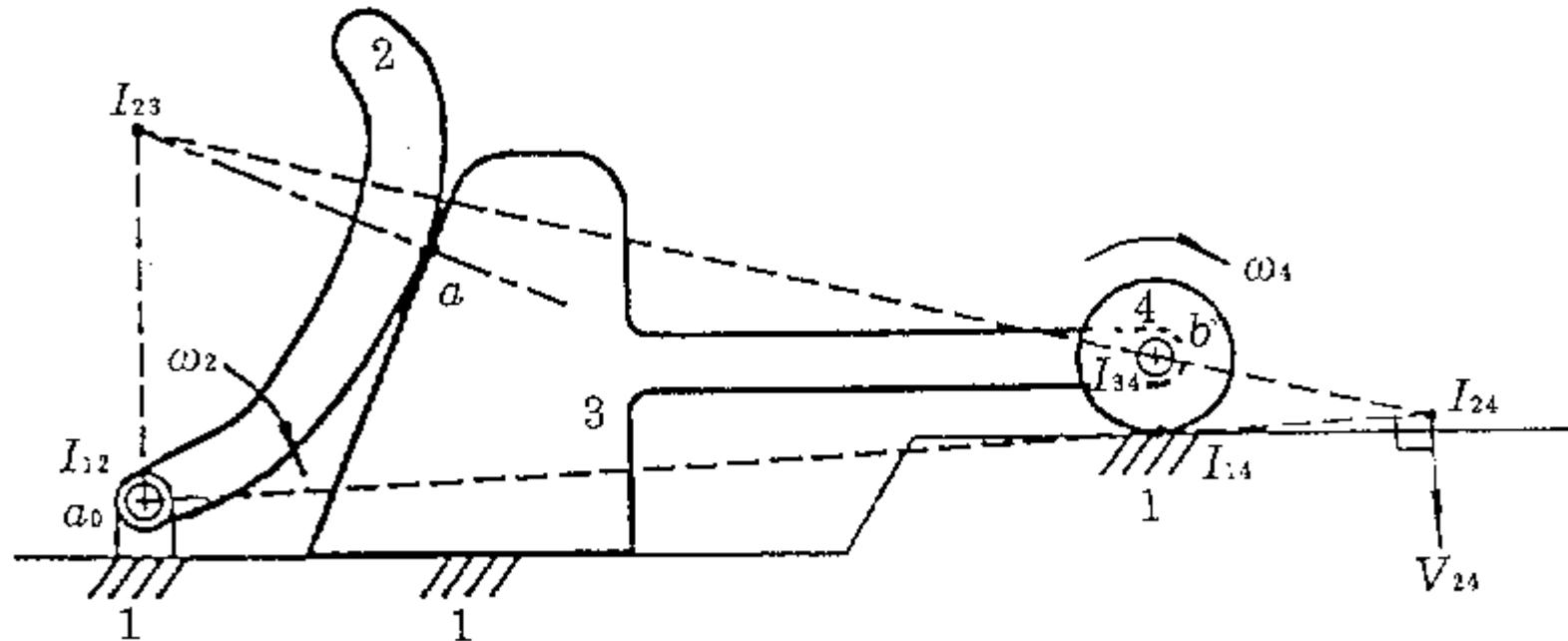
6-1 瞬心法Instant center method

- 首先求得機構中兩桿之瞬心，再經瞬心由一桿的已知速度求得另外一桿的未知速度。
- 瞬心法是一種圖解法，無法直接用來進行加速度分析，因此大多是驗證利用其它方法進行速度分析之結果的正確性。



6-1 瞬心法 Instant center method

- 一個機構中的任意兩個機件(i和j)在任一時刻皆有一個共同點，且這個共同點在兩個機件上的線速度相同，則這個共同點稱為此二機件的瞬心(Instant center, instantaneous center, centro)，以 I_{ij} 表示之。



6-1-2 三心定理 Kennedy's Theorem

■ 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy's Theorem):

任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

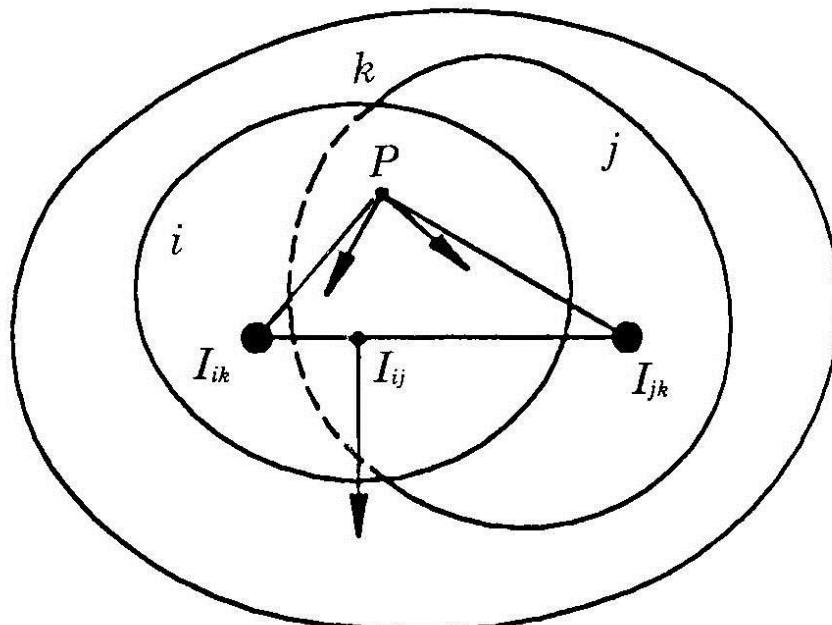


圖6.1 三心定理

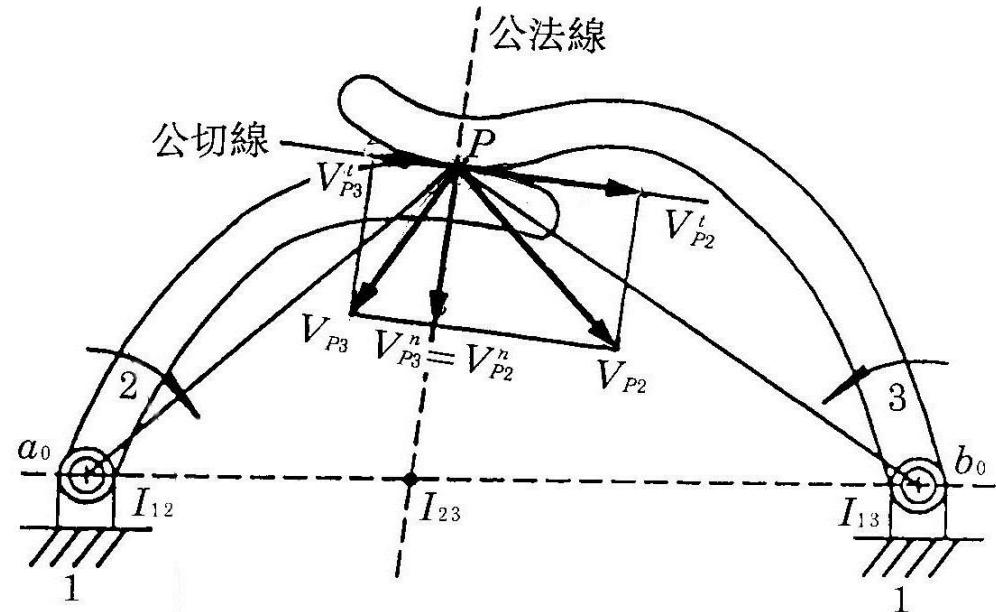
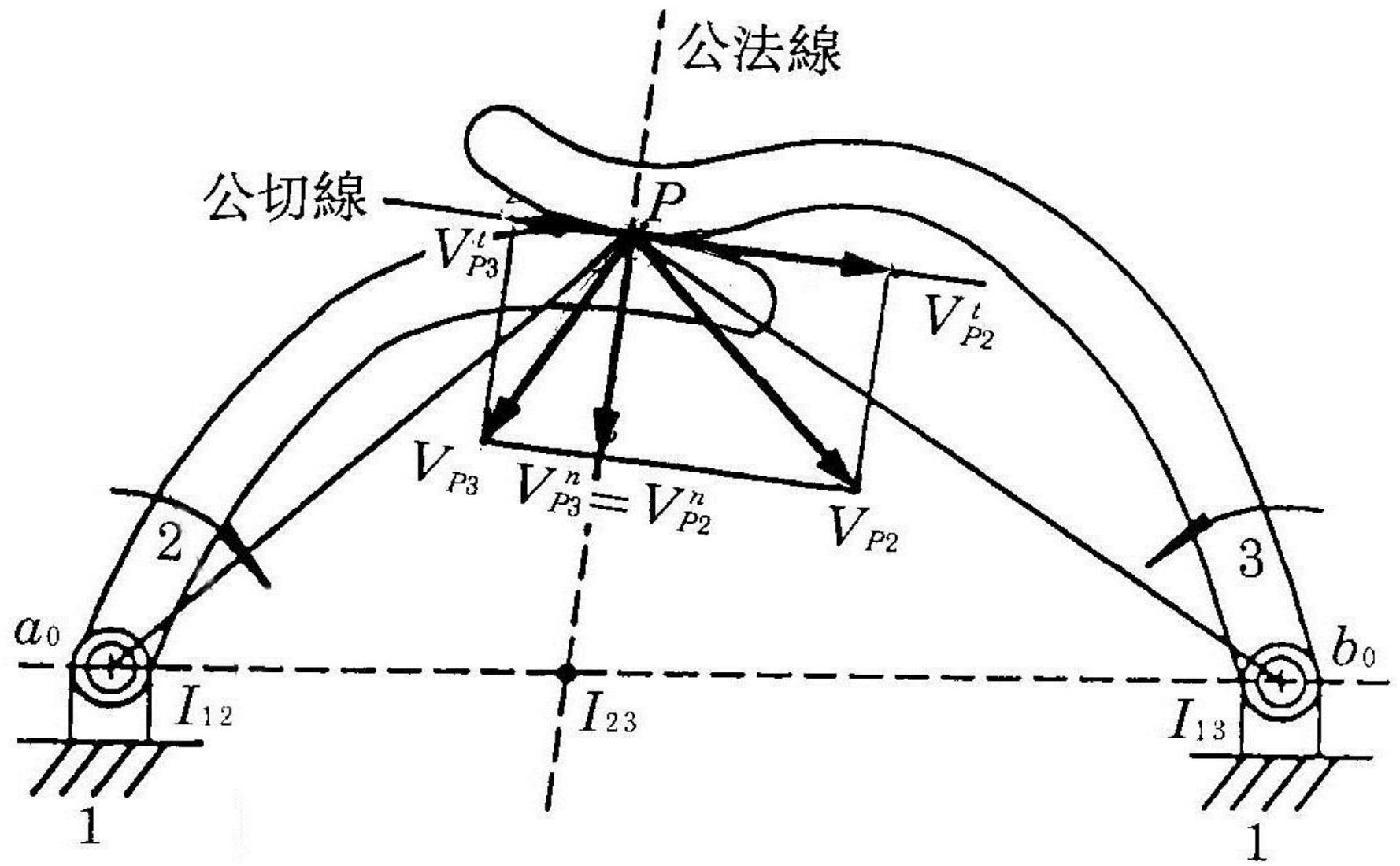


圖6.2 滑動接觸



6-1-2 三心定理 Kennedy's Theorem

- 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy's Theorem):
任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

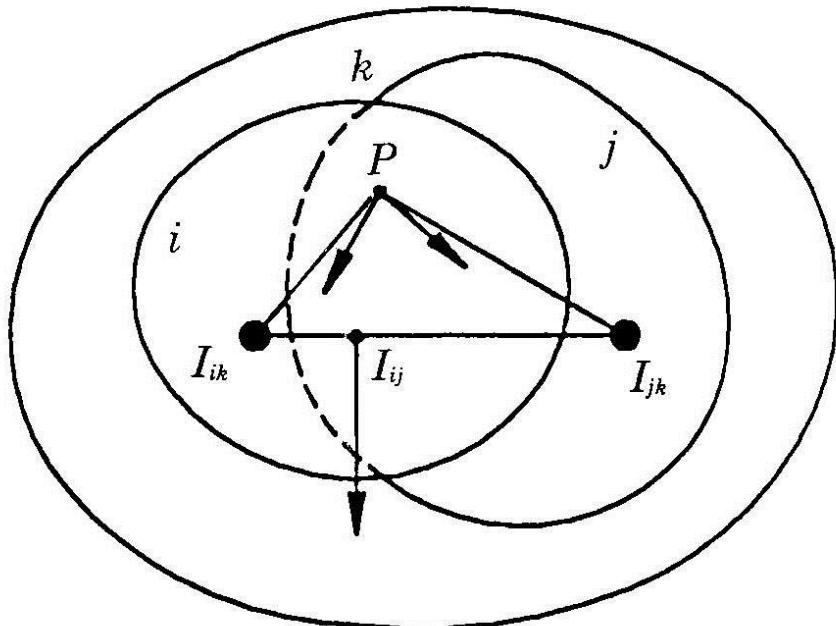


圖6.1 三心定理

- 設桿i、桿j、以及桿k為三個做相對平面運動的機件，如圖6.1所示。
- 桿i與桿k的瞬心為 I_{ik} 、桿j與桿k的瞬心為 I_{jk} ，若桿i與桿j的瞬心不在 I_{ik} 和 I_{jk} 的連線上，而在點P，則在這個瞬間，在桿i上點P的運動方向與 $P I_{ik}$ 垂直，而桿j上點P的運動方向與 $P I_{jk}$ 垂直，由於這兩個方向不同，所以點P在桿i與桿j上的速度不同，不是桿i與桿j的瞬心。
- 因此，唯有桿i與桿j的瞬心 I_{ij} 在 I_{ik} 和 I_{jk} 的連線上，即三個機件的三個瞬心在一直線上，才能合乎瞬心的定義。

6-1-2 三心定理 Kennedy's Theorem

- 三心定理或稱甘乃迪定理(Kennedy's Theorem):

任意三個機件做相對平面運動時，有三個瞬心，且這三個瞬心必在一直線上。

- 圖6.2所示為一個三桿機構，桿1為固定桿，分別以旋轉對和桿2與桿3附隨，即 a_0 和 b_0 為固定軸樞。
- 若桿2和桿3以凸輪對附隨於接觸點P，則點P在桿2上之速度 V_{P2} 於公法線上的分量，必須等於點P在桿3上之速度 V_{P3} 於公法線上的分量，否則桿2與桿3將產生分離現象。
- 再者，由於點P不在 a_0 和 b_0 的連線上， V_{P2} 在公切線上之分量及 V_{P3} 在公切線上的分量皆不相等，而產生相對滑動運動。
- 所以，桿2與桿3在接觸點P的相對運動，為沿著公切線方向的相對滑動，且相對旋轉中心(即瞬心 I_{23})必須在公法線上。
- 由於 a_0 為瞬心 I_{12} ， b_0 為瞬心 I_{13} ，根據三心定理， I_{23} 必須在 I_{12} 和 I_{13} 的連線上；因此，瞬心 I_{23} 位於通過接觸點P的公法線及瞬心 I_{12} 和 I_{13} 之連線的交點上。

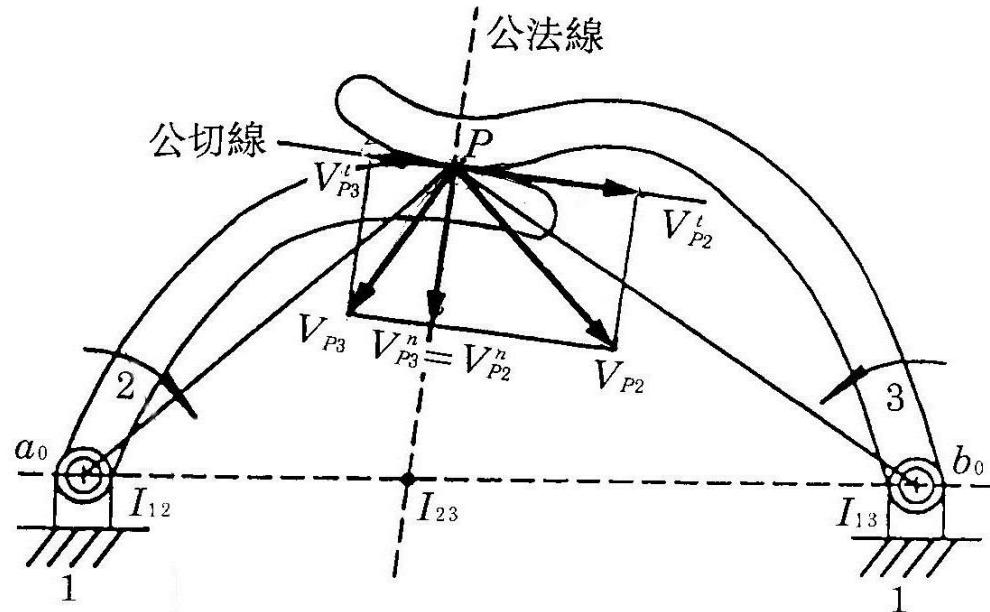


圖6.2 滑動接觸

■ 其步驟如下：

- 一. 機件以阿拉伯數字編號，桿i與桿j的瞬心以 I_{ij} 表示之。
- 二. 計算瞬心數，並列出所有的瞬心。具有N根機件的機構，有 $N(N-1)/2$ 個瞬心。
- 三. 畫一輔助圓，在圓周上標示點1、點2、點3、...、點N，代表有N根機件。
- 四. 利用觀察法找出明顯的瞬心，如旋轉對、滑行對、滾動對、凸輪對等。
- 五. 若桿i與桿j的瞬心為已知，則在輔助圓上的點i與點j間畫一實線，其它未知瞬心則以虛線畫之。
- 六. 根據三心定理並配合輔助圓上的已知實線，決定未知瞬心(即虛線)的位置。

[例6.1] 有一個四連桿組，如圖6.3所示，
試求此機構在這個位置的瞬心位置。

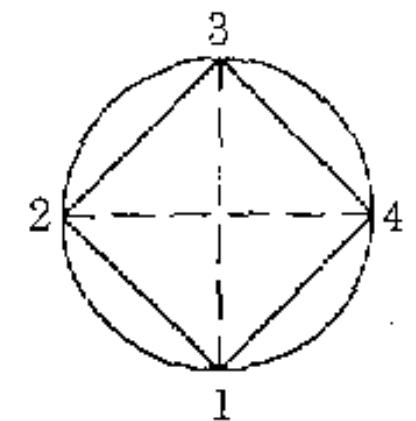
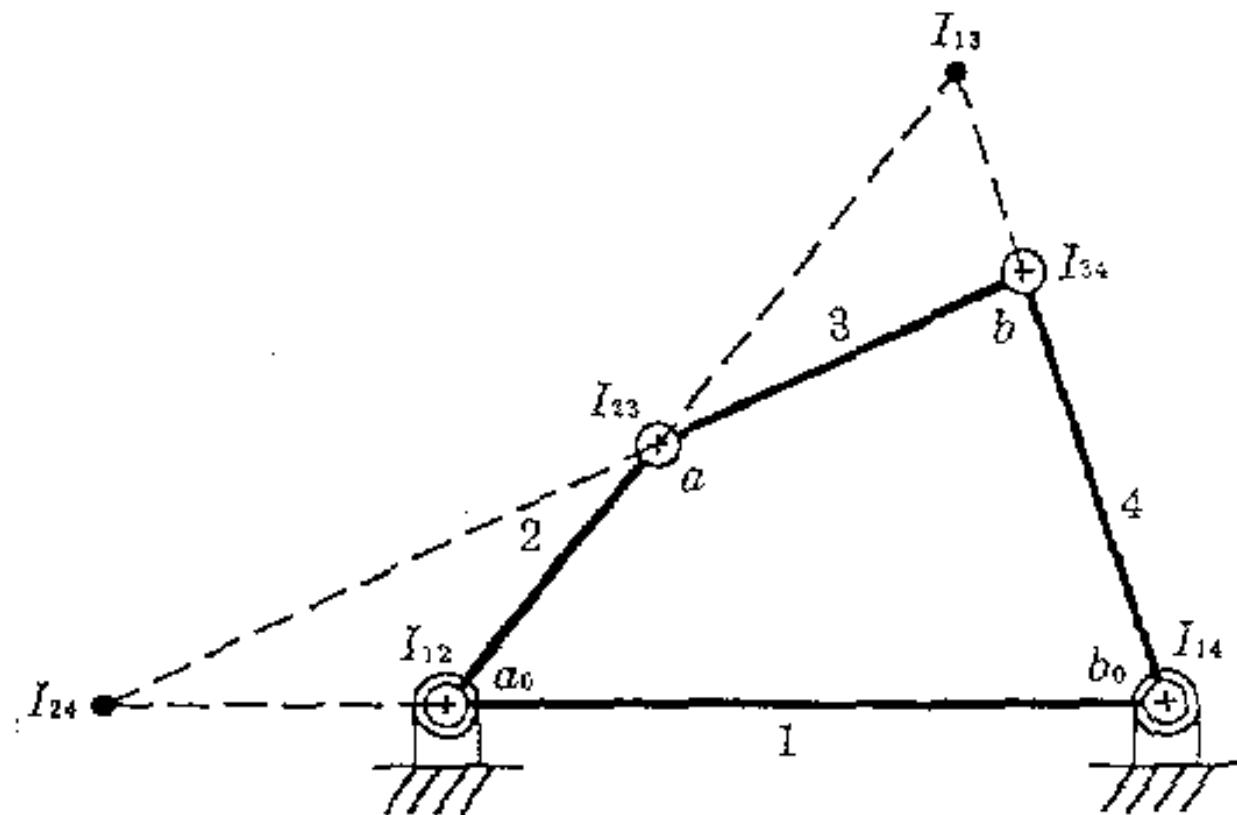
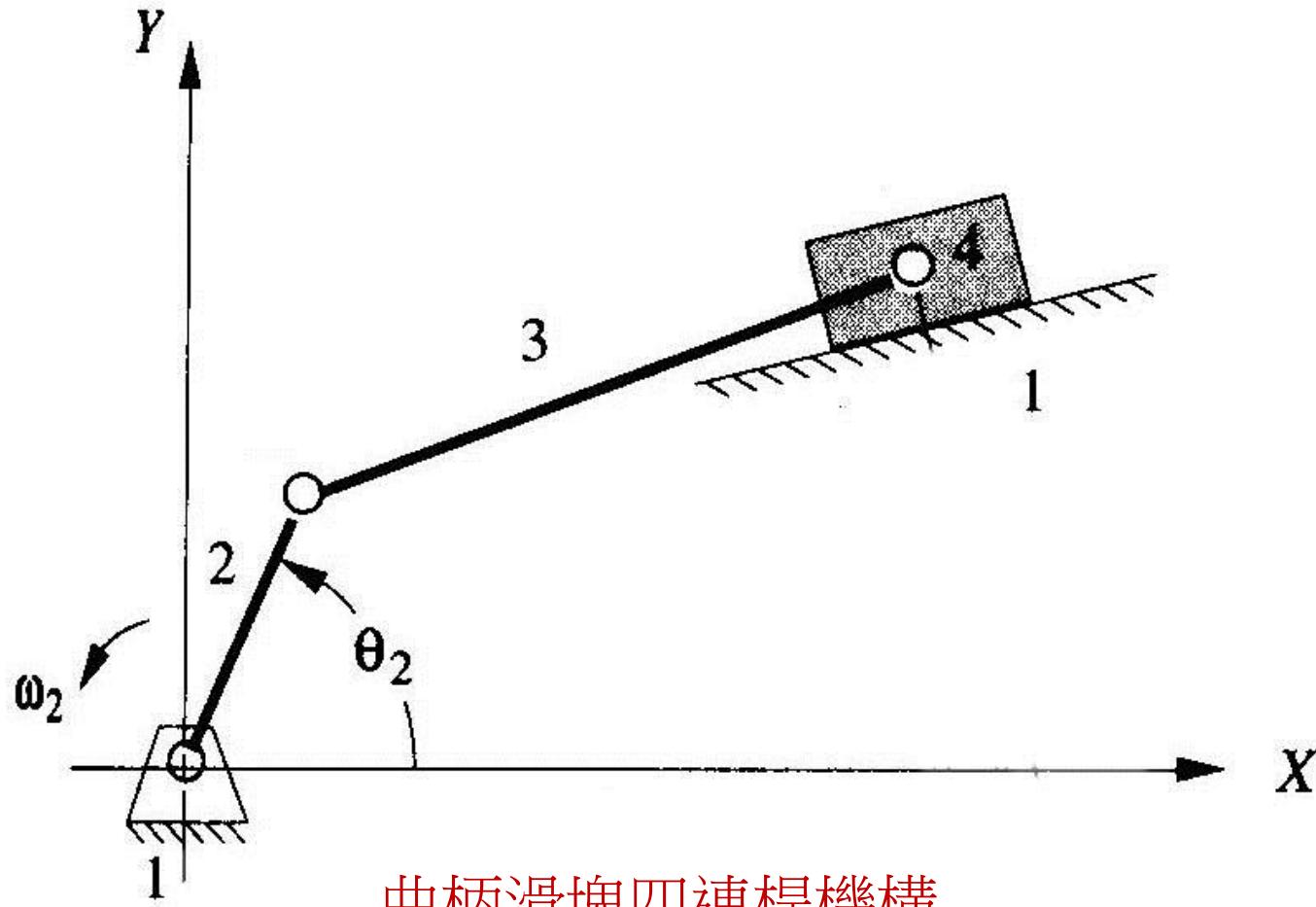
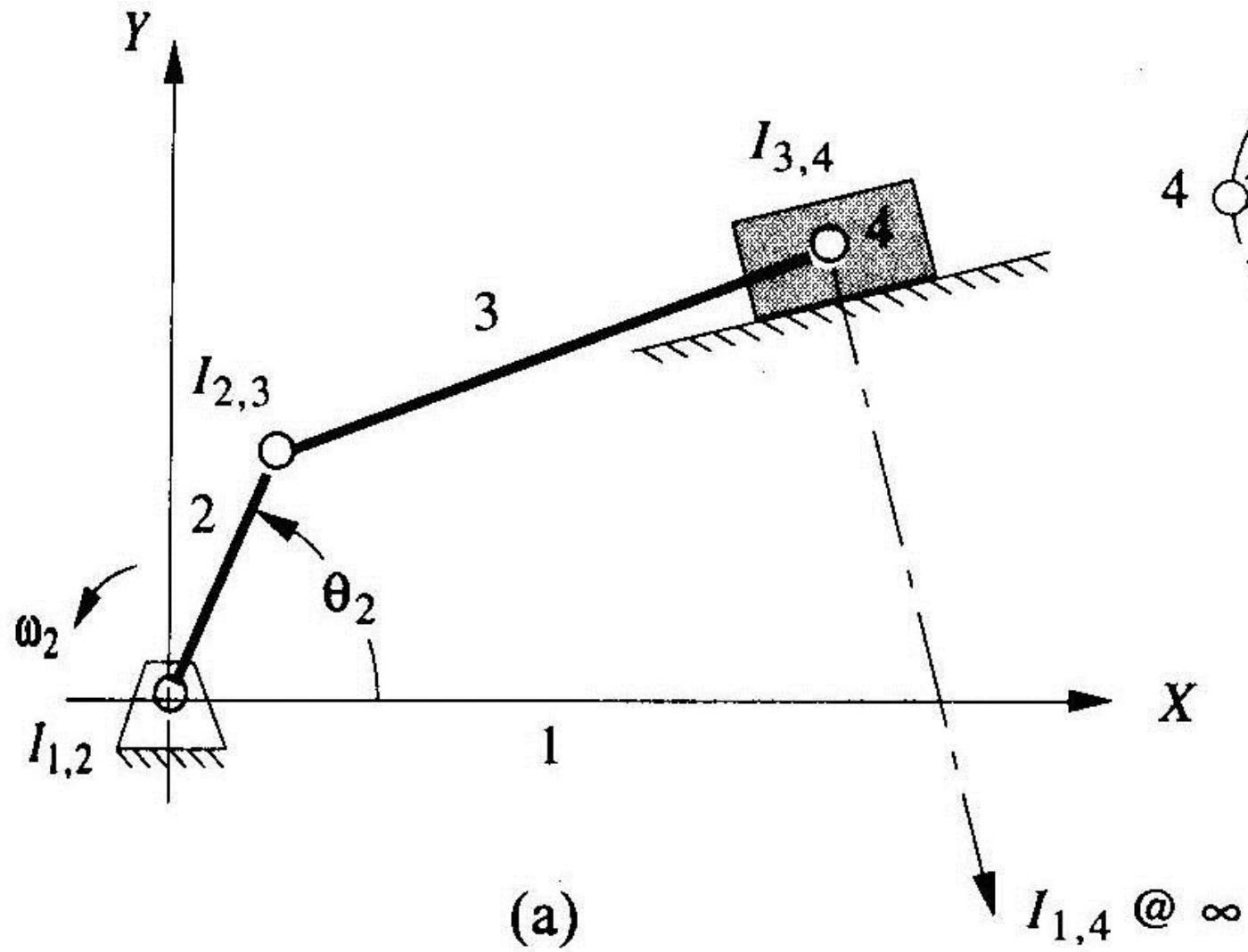


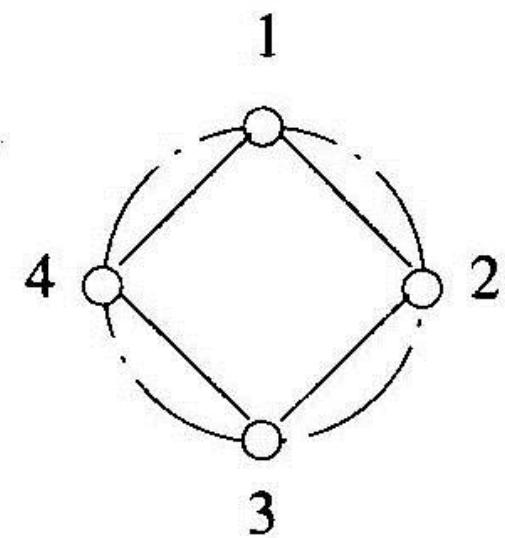
圖6.3 四連桿組[例6.1]

[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。

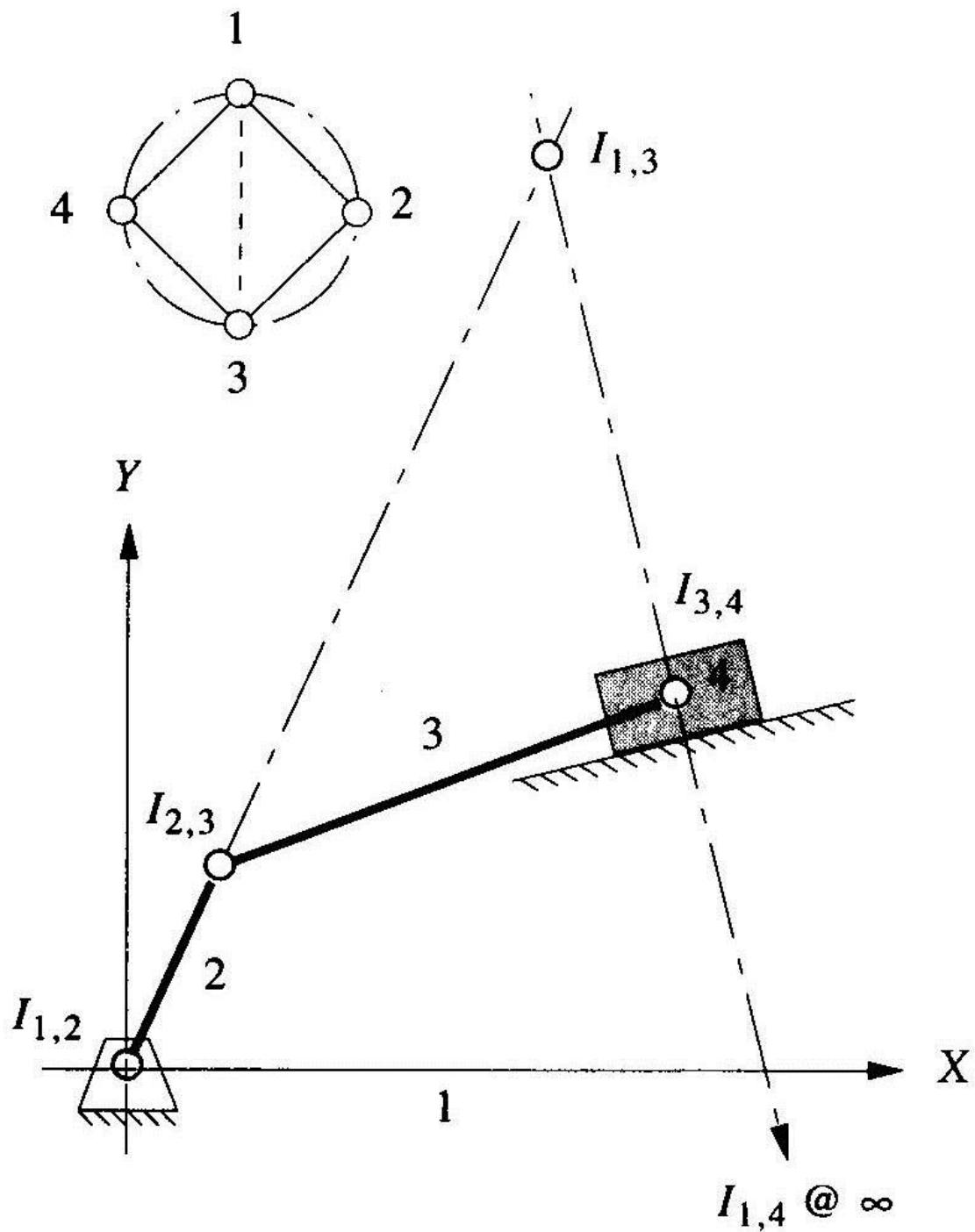




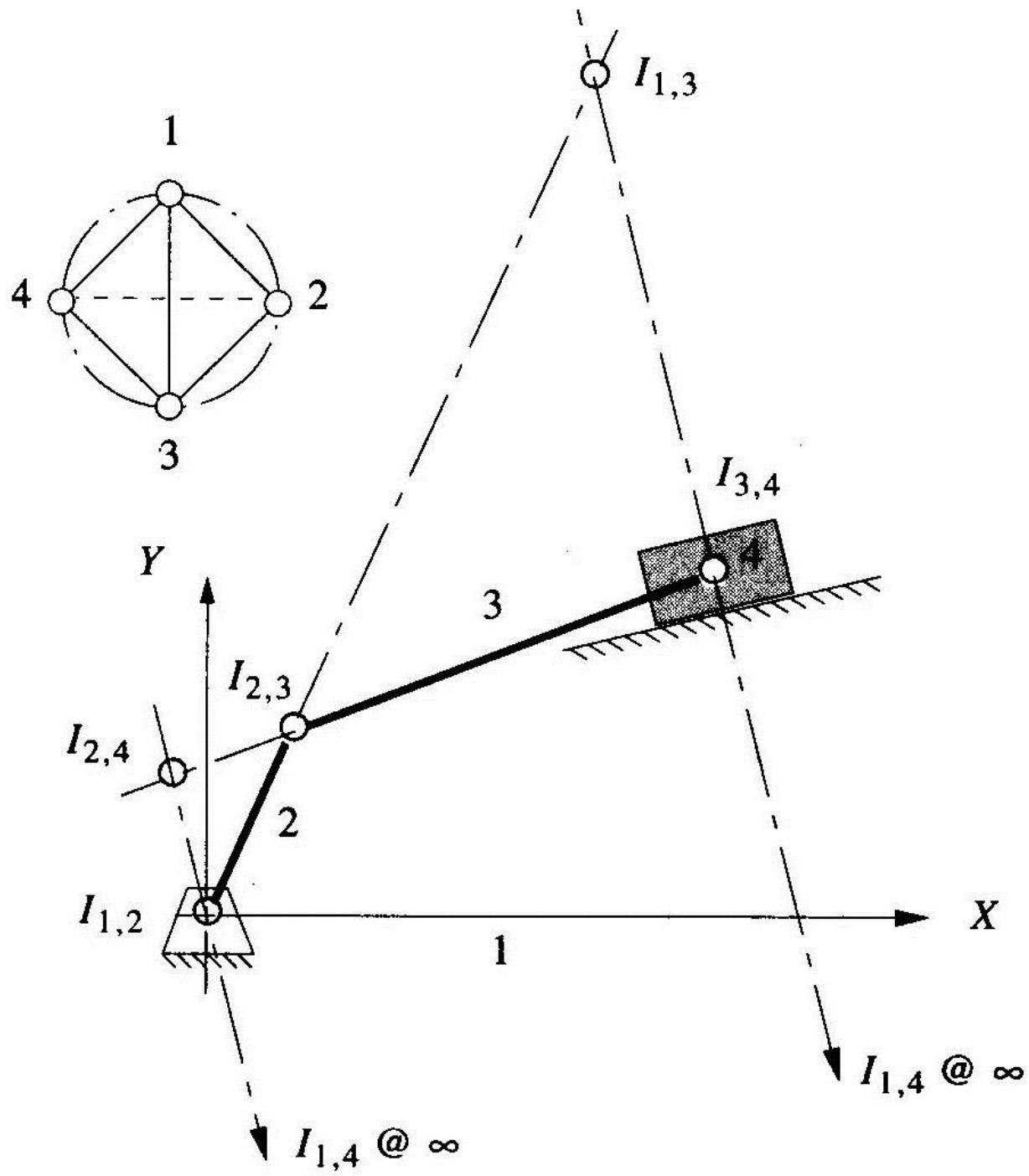
(a)



$I_{1,4} @ \infty$



(c)



[例6.2] 有一個四連桿機構，如圖6.4所示，試求此機構在這個位置的瞬心位置。

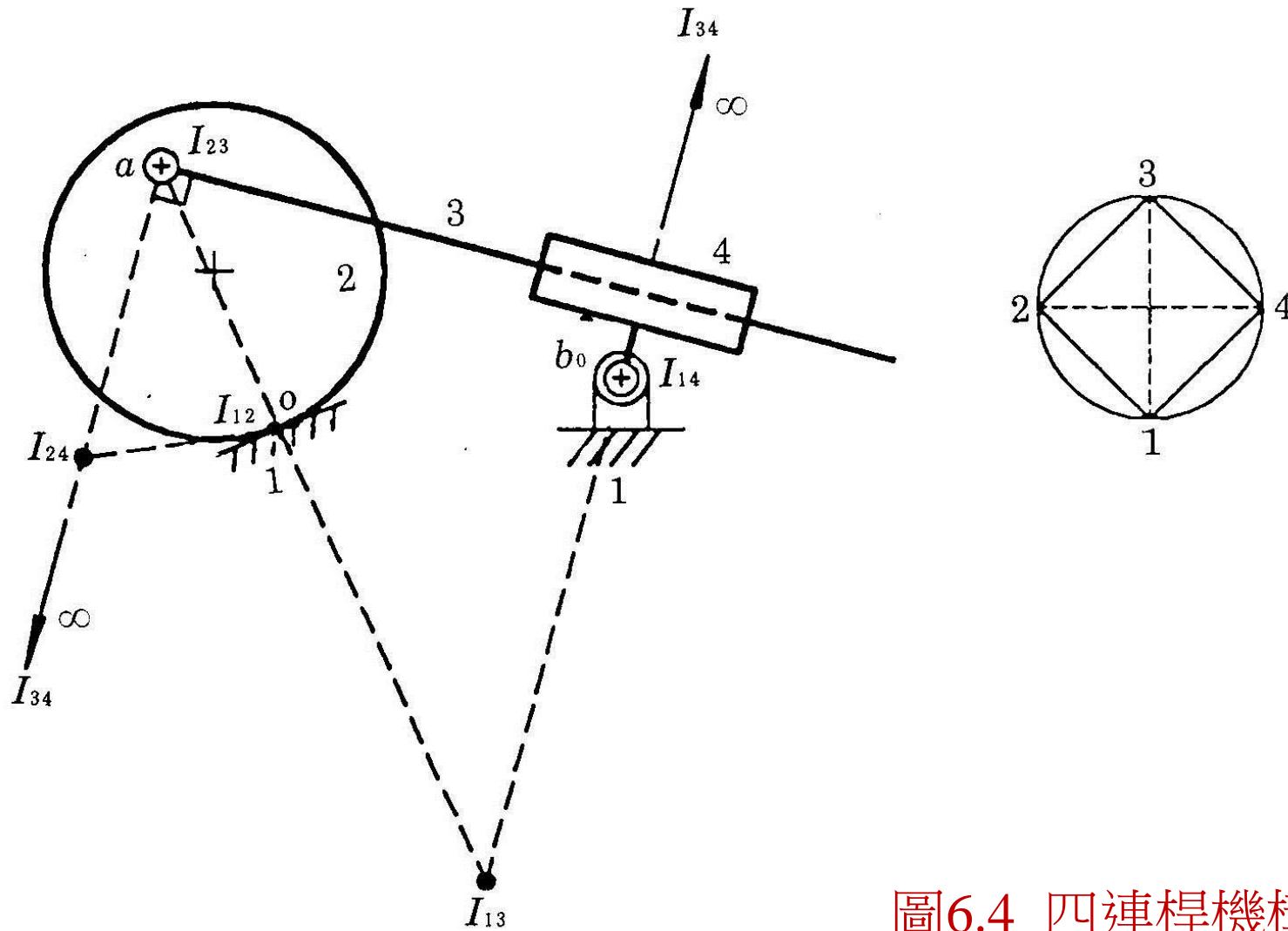
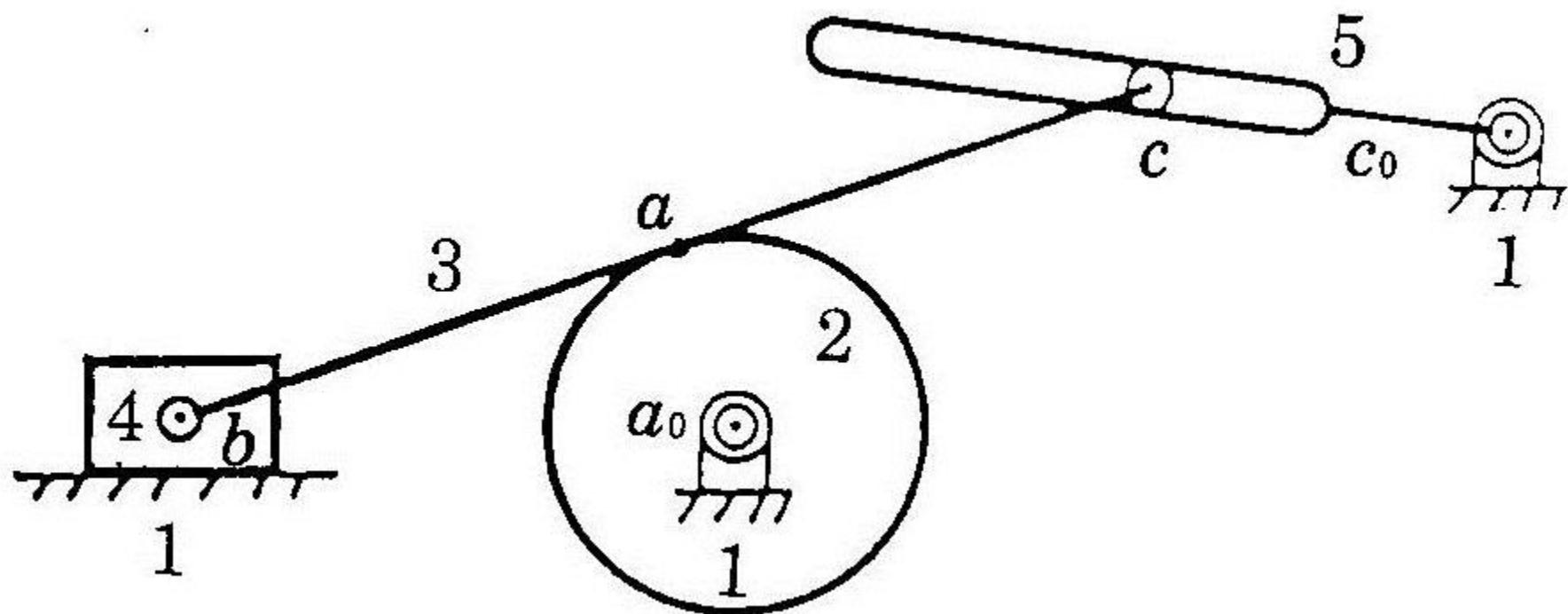
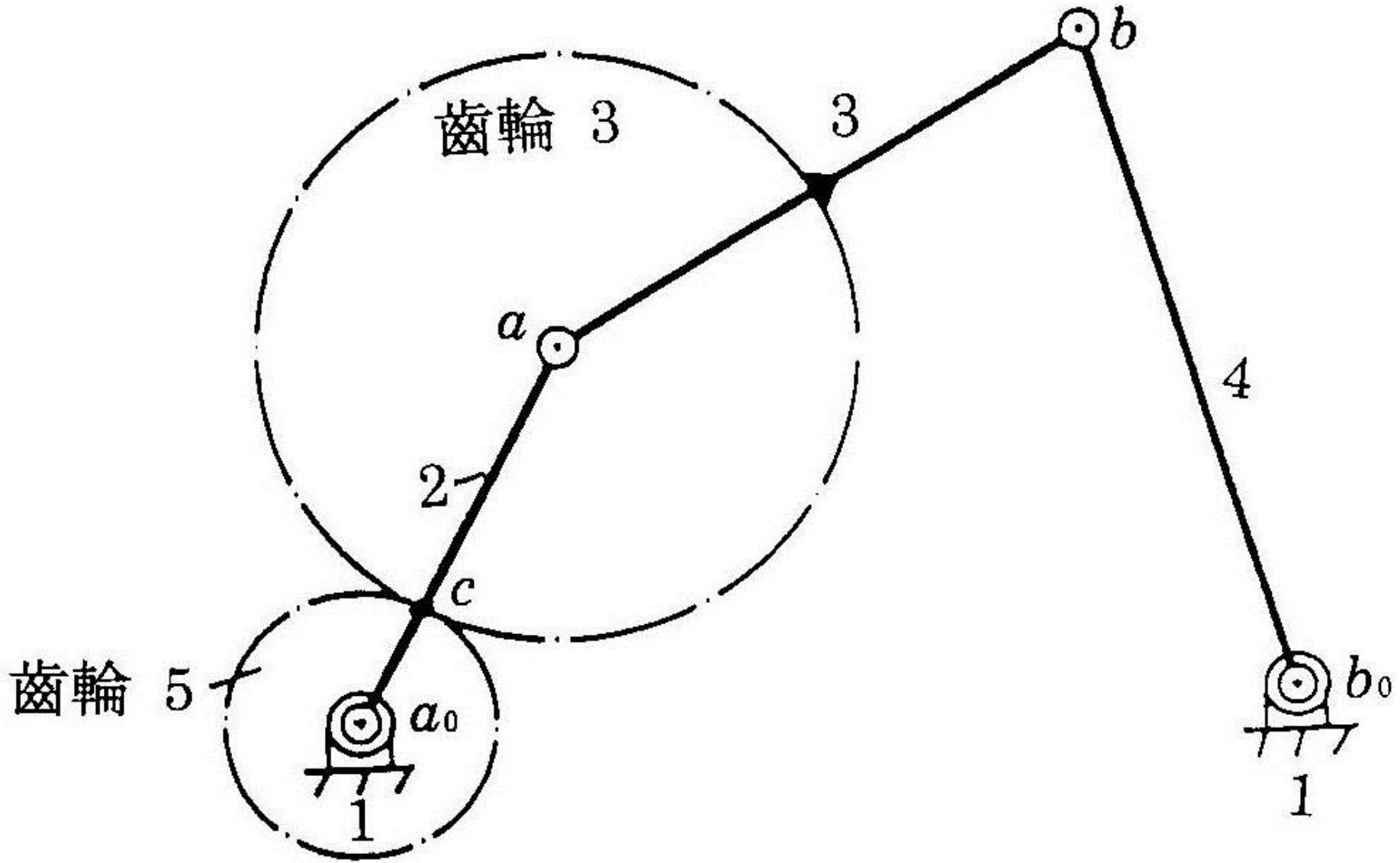


圖6.4 四連桿機構[例6.2]

[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。



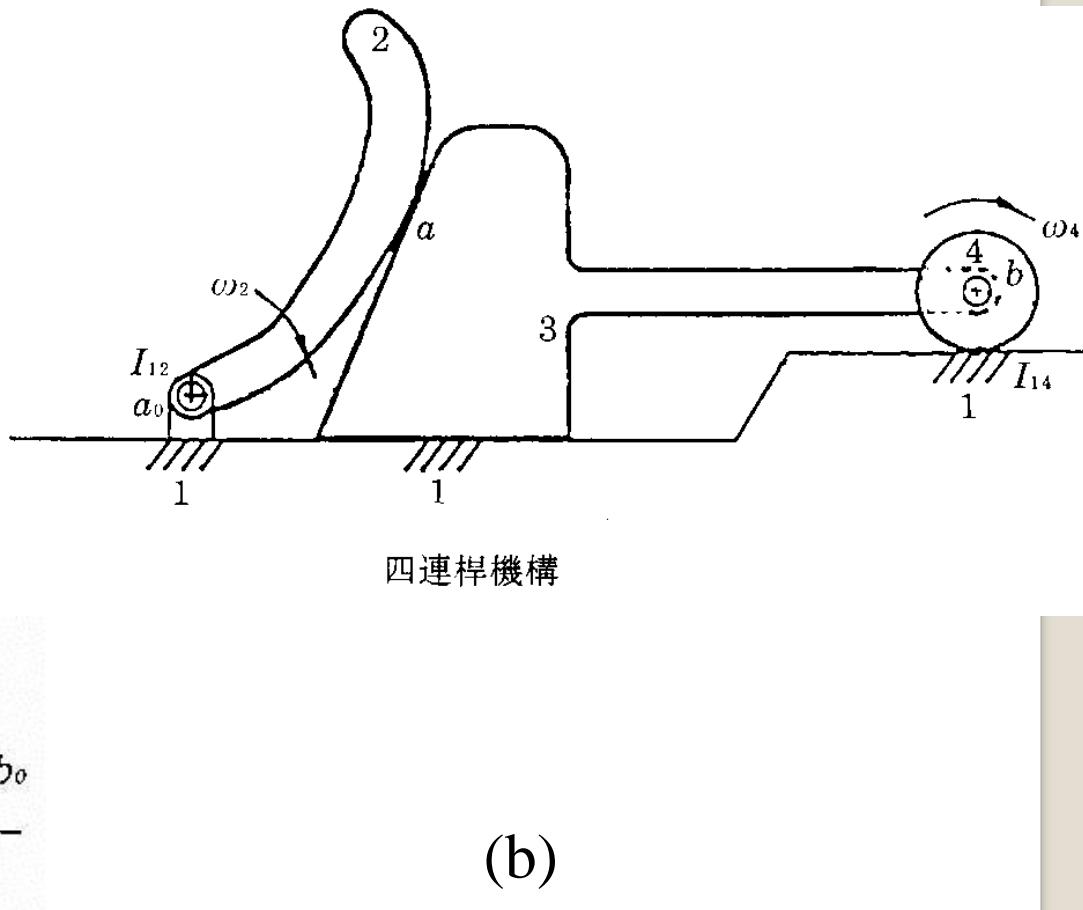
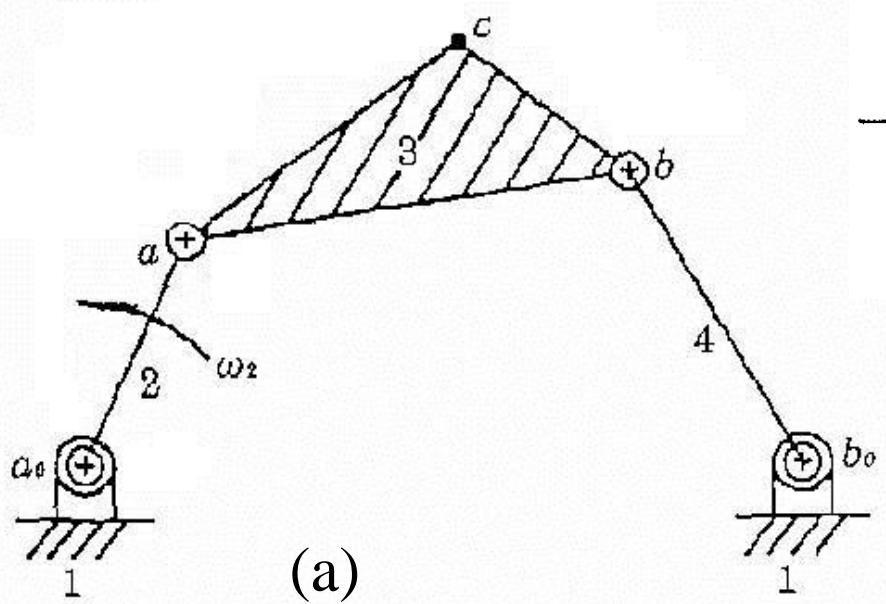
[Example] 試求此機構在這個位置的瞬心位置。



6-1-4 瞬心法速度分析

下列四連桿機構，如圖所示，(1)請求出其所有的瞬心位置。

(2)若桿2的角速度 ω_2 已知，試利用瞬心法求圖(a)中桿3上耦點C的線速度 V_3 ，及圖(b)之桿4的角速度 ω_4 。



[例6.3]

若桿2的角速度 ω_2 已知，試利用瞬心法求桿3上耦點c的線速度 V_c 。

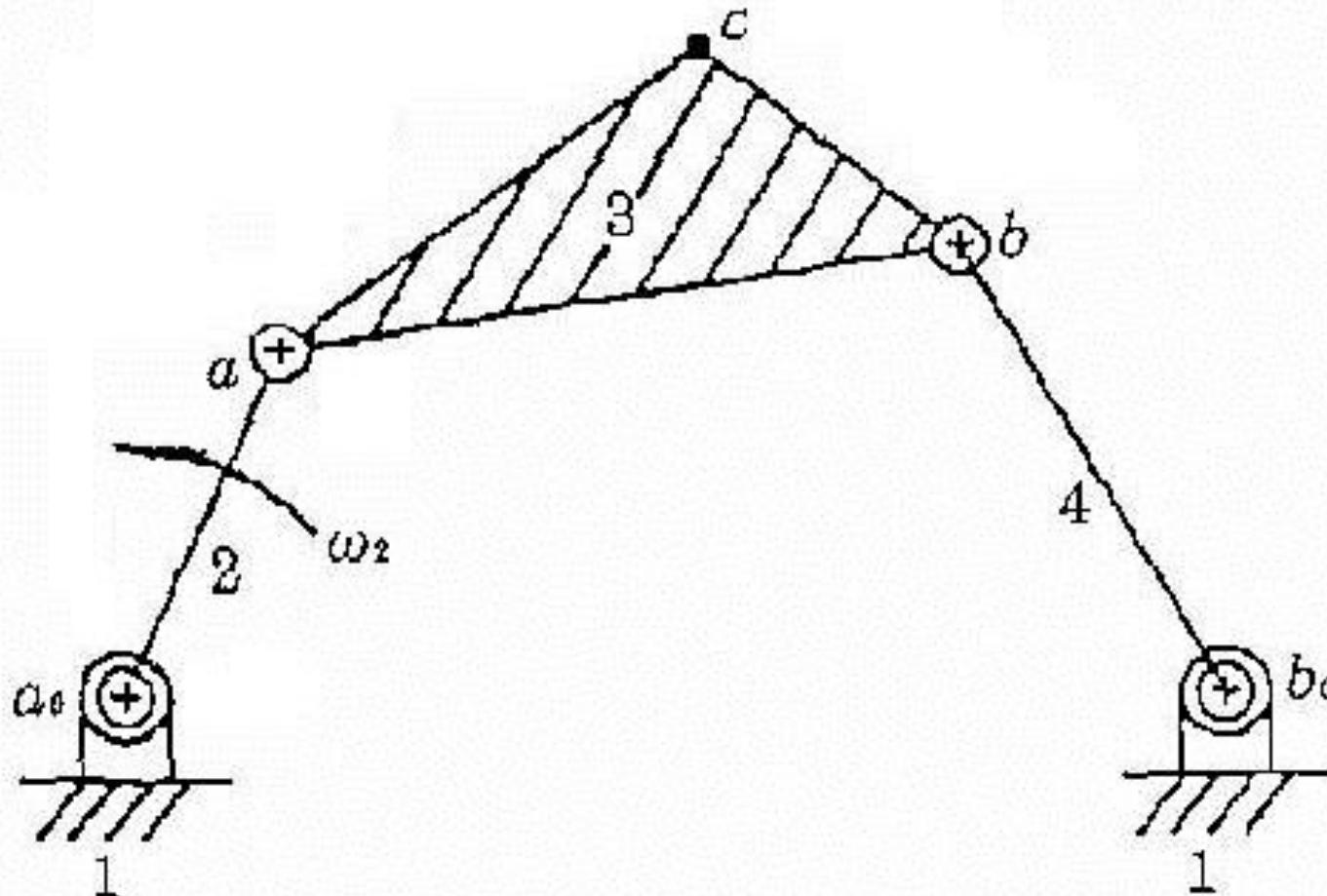


圖6.5 四連桿組[例6.3]

6-1-4 瞬心法速度分析

6-1-4 瞬心法速度分析

[例6.3]若桿2的角速度 ω_2 已知，試利用瞬心法求桿3上耦點c的線速度 V_c 。

$$V_{23} = \omega_2(I_{23}I_{12})$$

$$V_{23} = \omega_3(I_{23}I_{13})$$

$$\omega_3 = \omega_2(I_{23}I_{12} / I_{23}I_{13})$$

$$V_c = \omega_3(cI_{13})$$

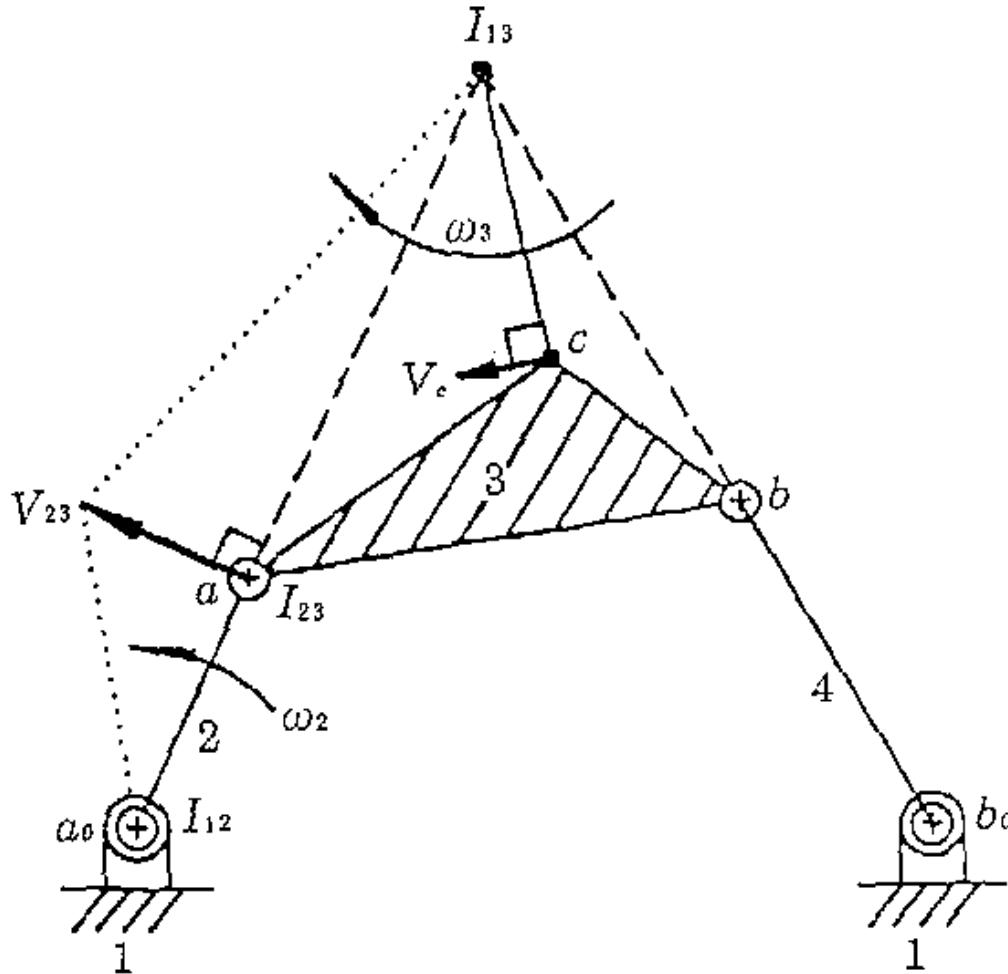
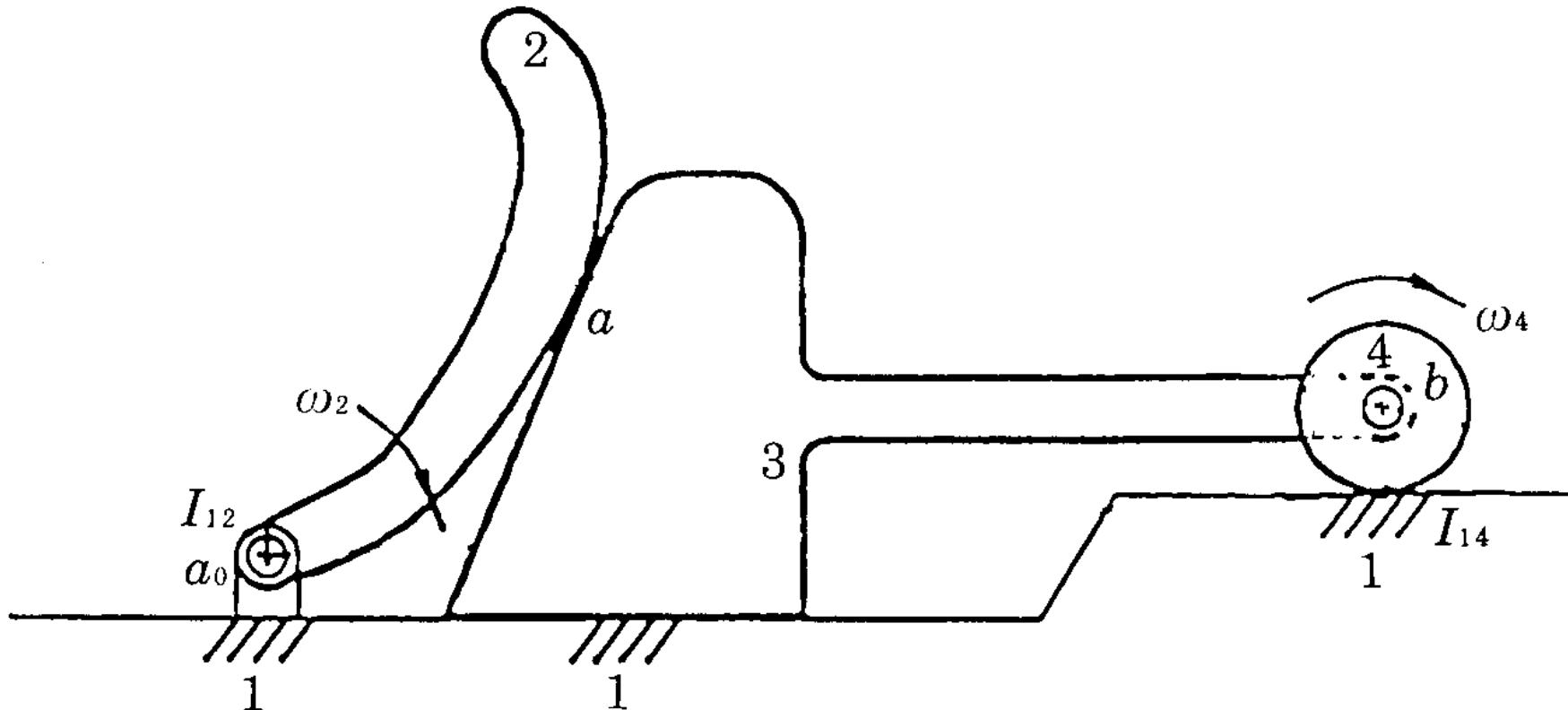


圖6.5 四連桿組[例6.3]

[例6.4]若桿2的角速度 ω_2 已知，試利用瞬心法求桿4的角速度 ω_4 。



四連桿機構

6-1-4 瞬心法速度分析

[例6.4]若桿2的角速度 ω_2 已知，試利用瞬心法求桿4的角速度 ω_4 。

$$V_{24} = \omega_2(I_{24} I_{12}) = \omega_4(I_{24} I_{14})$$

$$\omega_4 = \omega_2(I_{24} I_{12} / I_{24} I_{14})$$

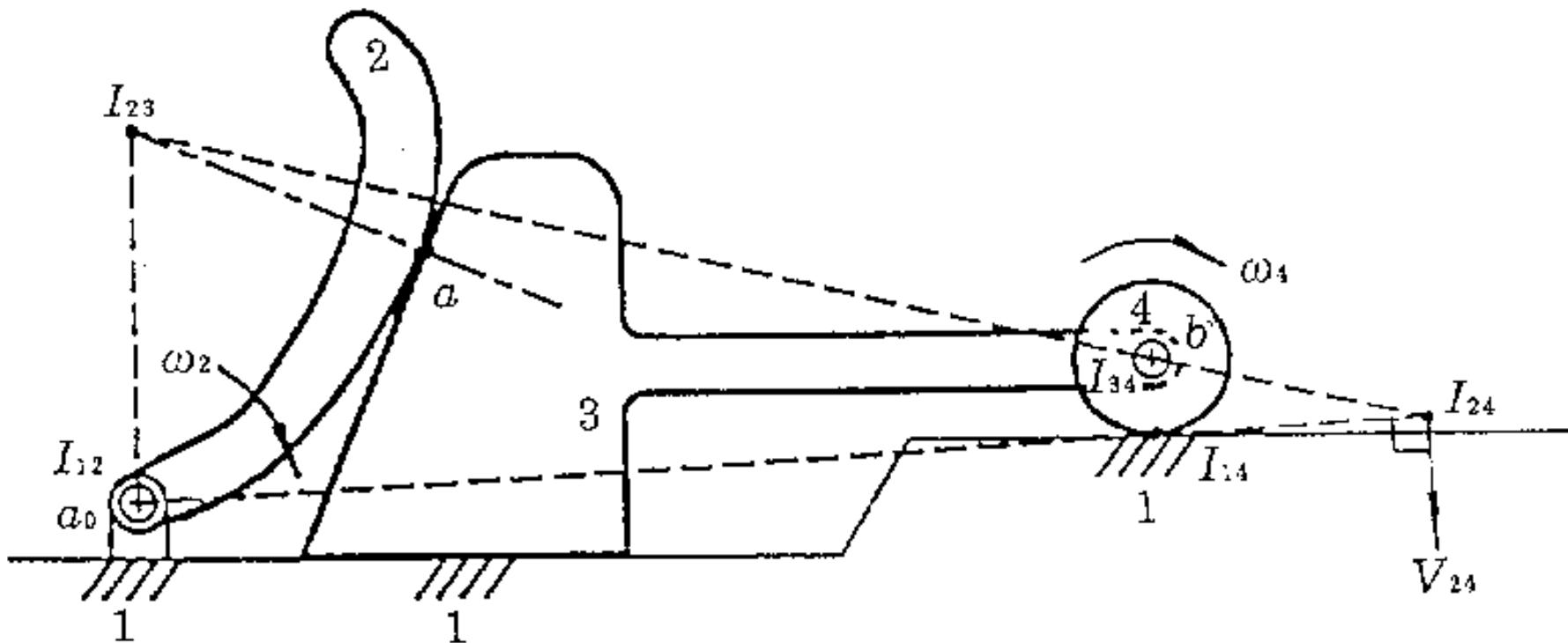


圖6.6 四連桿機構[例6.4]