第 5 章　習題解答

習題 5-1

1. 第一步驟：將區間 $[0,6]$ 作一等 n 分割：

   分割 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n \mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=6\}$ 將區間 $[0,6]$

   分成 n 個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{6-0}{n}=\frac{6}{n}$$

   且分割點 x_k 的值為 $x_k=a+k\Delta x_k=0+k\frac{6}{n}=\frac{6k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間 $[x_{k-1},x_k]$ 中任取一數 $c_k,\ k=1,2,\cdots,n$ ：

   令 $c_k=x_k=\frac{6k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{6k}{n}+1\right)\frac{6}{n}=\frac{72}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{72}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6=\frac{36(n+1)}{n}+6$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{36(n+1)}{n}+6)=42$$

故，所圍區域的面積為 42 。

2. 第一步驟：將區間 $[0,4]$ 作一等 n 分割：

   分割 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n \mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=4\}$ 將區間 $[0,4]$

   分成 n 個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$$

   且分割點 x_k 的值為 $x_k=a+k\Delta x_k=0+k\frac{4}{n}=\frac{4k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間 $[x_{k-1},x_k]$ 中任取一數 $c_k,\ k=1,2,\cdots,n$ ：

   令 $c_k=x_k=\frac{4k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{4k}{n}\right)^2+1\right)\frac{4}{n}=\frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{64}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4$$

$$=\frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}+4$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[\frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}+4] = \frac{64}{3}+4 = \frac{76}{3}$$

故，所圍區域的面積為$\frac{76}{3}$。

3. 第一步驟：將區間$[0,1]$作一等n分割：

分割$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n \mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1\}$將區間$[0,1]$分成$n$個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

且分割點x_k的值為$x_k = a+k\Delta x_k = 0+k\frac{1}{n} = \frac{k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間$[x_{k-1},x_k]$中任取一數c_k, $k=1,2,\cdots,n$：

令$c_k = x_k = \frac{k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{n^4}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

故，所圍區域的面積為$\frac{1}{4}$。

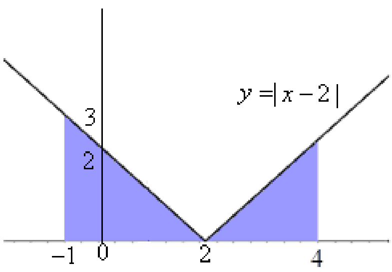
習題 5-2

1. (1) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$　　(2) $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$

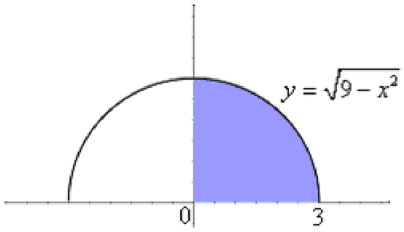
(3) $\int_0^4 \sqrt{x}dx$　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

2. (1) $\int_0^2 (3x^2+2)dx = 12$　　(2) $\int_0^1 x(x+1)dx = \frac{5}{6}$　　(3) $\int_0^1 (x^3+x)dx = \frac{3}{4}$

3. (1) $\frac{13}{2}$



(2) $\dfrac{9\pi}{4}$



習題 5-3

1. $e^{\sqrt{x}}$

2. $2x\sin((x^2+9)^3)$

3. $\dfrac{2x}{1+x^6}-\dfrac{3x^2}{1+x^9}$

4. $2(e^{\pi}-1)$

5. $f(x)=4x^3-\dfrac{3}{2}x^2$

6. 3

7. $f(1)=3+2e^2,\ f'(1)=4e^2$

8. $f(x)=1+2x$

習題 5-4

1. (1) $\dfrac{1}{3}x^3-x^2+3x+c$

(2) $-x^3+x^2+5x+c$

(3) $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{3}{2}x^2+c$

(4) $\dfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\dfrac{12}{7}x^{\frac{7}{3}}+\dfrac{4}{3}x^3+c$

(5) $2x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+c$

(6) $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c$

(7) $-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{2}x^{-2}+c$

(8) $21x^{\frac{1}{3}}-\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$

2. $f(x)=x^3+\dfrac{1}{2}x^2-3$

習題 5-5

1. $\dfrac{125}{6}$

2. $\dfrac{7}{6}$

3. $\dfrac{8}{3}$

4. 2

5. $\dfrac{5}{6}$

6. 18

7. $\dfrac{125}{6}$

8. 72

9. $\dfrac{16}{3}$