習題 4-8

Sol:

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x}{1}$

$=1$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 3x\cos 2x\cdot 2}{2x}$

$=2\lim\limits_{x\to0}\cos 2x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=2\cdot1\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x\cdot 3}{1}$

$=2\cdot3=6$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cos x}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^{-1}5x}{x}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}\cdot5}{1}=5$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\left(\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ （不定型 $\infty\cdot0$ ）

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\tan^{-1}x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}$ （為不定型 $\dfrac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2}{1+x^2}=-1$

6. $\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$ （不定型 $\infty-\infty$）

$=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$ （為不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to1^+}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}$ （為不定型 $\frac{0}{0}$，再由羅必達法則）

$=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}$

7. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ （不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}$ （不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

8. $\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ （不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ （不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}$ （不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{6}=\frac{\ }{6}$

9. $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ （不定型 $\infty-\infty$）

$=\lim_{x\to0^+}\frac{(e^x-1)-x}{x(e^x-1)}$ （為不定型 $\frac{0}{0}$，由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{(e^x-1)+xe^x}$ （為不定型 $\frac{0}{0}$，再由羅必達法則）

$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\frac{1}{2}$

10. $\lim_{x\to0^+}x^x$

$=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}$

$=e^{\lim_{x\to0^+}x\ln x}$

計算次方數：

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$ （為 $\frac{-\infty}{\infty}$ 型，由羅必達法則）

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

11. $\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ （為 1^∞ 型，取 $e^{\ln *}$）

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+2x)^{\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(1+2x)}$$

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)}{x}}$$ （不定型 $\frac{0}{0}$ ，由羅必達法則）

$$=e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{1}}=e^2$$

12. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n$ （為 1^∞ 型，取 $e^{\ln *}$）

$$=\lim_{n\to\infty} e^{\ln(1+\frac{2}{n})^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+\frac{2}{n})}$$

計算次方數：

$$=\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{2}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}$$ （不定型 $\frac{0}{0}$ ，再由羅必達法則）

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{n}}(-\frac{2}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{2}{n}}=2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n})^n = e^2$$

13. $\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}}$　（為∞^0型，取$e^{\ln *}$）

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2\ln x}\ln(1+2x)}$$

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{2\ln x}}$$　（不定型$\frac{\infty}{\infty}$，由羅必達法則）

$$=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+2x}\cdot 2}{2\cdot\frac{1}{x}}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+2x}}=e^{\frac{1}{2}}$$

14. $\lim_{x\to 0^+}(1+\frac{1}{x})^x$　（為∞^0型，取$e^{\ln *}$）

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$$

計算次方數：

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(1+\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$　（為$\frac{\infty}{\infty}$型，由羅必達法則）

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$$

原式$=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=e^1=e$

得近似值 1.7455。