第 5 章　習題解答

習題 5-1

1. Sol:第一步驟：將區間$[0,6]$作一等n分割：

分割$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=6\}$將區間$[0,6]$分成$n$個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{6-0}{n}=\frac{6}{n}$$

且分割點x_k的值為$x_k=a+k\Delta x_k=0+k\dfrac{6}{n}=\dfrac{6k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間$[x_{k-1},x_k]$中任取一數$c_k,\ k=1,2,\cdots,n$：

令$c_k=x_k=\dfrac{6k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{6k}{n}+1\right)\frac{6}{n}=\frac{72}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{72}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+6=\frac{36(n+1)}{n}+6$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{36(n+1)}{n}+6)=42$$

故，所圍區域的面積為42。

2. Sol:第一步驟：將區間$[0,4]$作一等n分割：

分割$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=4\}$將區間$[0,4]$分成$n$個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$$

且分割點x_k的值為$x_k=a+k\Delta x_k=0+k\dfrac{4}{n}=\dfrac{4k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間$[x_{k-1},x_k]$中任取一數$c_k,\ k=1,2,\cdots,n$：

令$c_k=x_k=\dfrac{4k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{4k}{n}\right)^2+1\right)\frac{4}{n}=\frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{64}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4$$

$$=\frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}+4$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[\frac{32(n+1)(2n+1)}{3n^2}+4] = \frac{64}{3}+4 = \frac{76}{3}$$

故，所圍區域的面積為$\frac{76}{3}$。

3. Sol:第一步驟：將區間$[0,1]$作一等n分割：

分割$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n \mid 0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1\}$將區間$[0,1]$分成$n$個等長度的子區間，所以，每一子區間的長度為

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

且分割點x_k的值為$x_k = a + k\Delta x_k = 0 + k\frac{1}{n} = \frac{k}{n},\ \ k=0,1,2,\cdots,n$

第二步驟：在區間$[x_{k-1},x_k]$中任取一數$c_k,\ k=1,2,\cdots,n$：

令$c_k = x_k = \frac{k}{n},\ \ k=1,2,\cdots,n$

第三步驟：計算黎曼和：

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3 = \frac{1}{n^4}\cdot\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4n^2}$$

第四步驟：將黎曼和取極限：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

故，所圍區域的面積為$\frac{1}{4}$。

習題 5-2

1. (1) Sol: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}\left[\frac{1}{(1/n)^2+1^2}+\frac{1}{(2/n)^2+1^2}+\cdots+\frac{1}{(n/n)^2+1^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(1/n)^2+1^2}+\frac{1}{(2/n)^2+1^2}+\cdots+\frac{1}{(n/n)^2+1^2}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$$ 。

(2) Sol: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$$ 。

(3) Sol: 假設P為區間$[0,4]$的一個等n分割，所以，$\Delta x = \frac{4}{n}$。

若令函數為 $f(x)=\sqrt{x}$ ，則 $c_i=\frac{4i}{n}$ ， $i=1,2,\cdots,n$ 。

所以，等 n 分割 P 為 $\{0,\frac{4}{n},\frac{8}{n},\cdots,\frac{4(n-1)}{n},\frac{4n}{n}=4\}$ 。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}\times\frac{4}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{4i}{n}}=\int_0^4\sqrt{x}dx$$

(4) Sol： $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{1}}+\frac{\sqrt{}}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}}}\right)=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

2. (1) Sol:

(i) 將區間 $[0,2]$ 作一等 n 分割：

每一個分割子區間長度為 $\Delta x=\frac{2}{n}$ ，且每一個分割點座標為

$x_k=\frac{2k}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n$ 。

(ii) 在每個分割子區間中任取一點：

$c_k=x_k=\frac{2k}{n},\ k=1,2,\cdots,n$

(iii) 計算黎曼和：

$$\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(3\left(\tfrac{2k}{n}\right)^2+2\right)\tfrac{2}{n}=\frac{24}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{n}=\frac{24}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4$$

$$=\frac{12n^2+12n+4}{n^2}$$

(iv) 計算極限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+12n+4}{n^2}=12$$

所以， $\int_0^2(3x^2+2)dx=12$ 。

(2) (i)將區間 $[0,1]$ 作一等 n 分割：

每一個分割子區間長度為 $\Delta x=\frac{1}{n}$ ，且每一個分割點座標為

$x_k=\frac{k}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n$ 。

(ii)在每個分割子區間中任取一點：

$c_k=x_k=\frac{k}{n},\ k=1,2,\cdots,n$

(iii)計算黎曼和：

$$\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{k}{n}\right)\left(\left(\tfrac{k}{n}\right)+1\right)\tfrac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{2n}$$

(v)　計算極限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}+\frac{n+1}{2n}]=\frac{2}{6}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

所以，$\int_0^1 x(x+1)dx=\frac{5}{6}$。

(3) (i)將區間 $[0,1]$ 作一等 n 分割：

每一個分割子區間長度為 $\Delta x=\frac{1}{n}$，且每一個分割點座標為

$x_k=\frac{k}{n},\ k=0,1,2,\cdots,n$。

(ii)在每個分割子區間中任取一點：

$c_k=x_k=\frac{k}{n},\ k=1,2,\cdots,n$

(iii)計算黎曼和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$

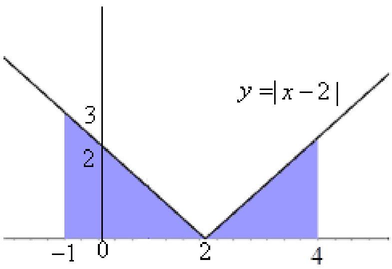
$$=\frac{(n+1)^2}{4n^2}+\frac{n+1}{2n}$$

(vi)　計算極限：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\frac{(n+1)^2}{4n^2}+\frac{n+1}{2n}]=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

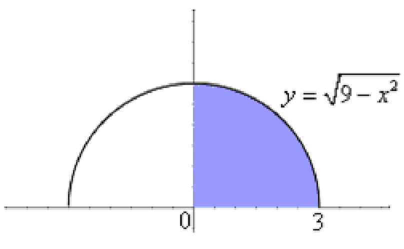
所以，$\int_0^1 (x^3+x)dx=\frac{3}{4}$。

3.　(1)



Sol：$\int_{-1}^{4}|x-2|dx=\frac{3\times 3}{2}+\frac{2\times 2}{2}=\frac{13}{2}$

(2)



Sol: $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx = \frac{1}{4}\left(\pi 3^2\right) = \frac{9\pi}{4}$

習題 5-3

1. Sol: $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\sqrt{t}}dt = e^{\sqrt{x}}$

2. Sol: $\frac{d}{dx}\int_5^{x^2+9} \sin(t^3)dt = \sin((x^2+9)^3)(x^2+9)' = 2x\sin((x^2+9)^3)$

3. Sol: $\frac{d}{dx}\int_{x^3}^{x^2} \frac{1}{1+t^3}dt = \frac{1}{1+(x^2)^3}(x^2)' - \frac{1}{1+(x^3)^3}(x^3)' = \frac{2x}{1+x^6} - \frac{3x^2}{1+x^9}$

4. Sol: $\int_0^{\pi}(2e^x - 5\cos x)dx = 2e^x - 5\sin x\Big|_0^{\pi} = 2(e^{\pi}-e^0) - 5(\sin\pi - \sin 0)$

$= 2(e^{\pi}-1)$

5. Sol:令 $k = \int_0^1 f(x)dx$,則 $f(x) = 4x^3 - 3x^2k$ 。

二邊同時積分得

$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 4x^3 - 3x^2kdx$

$\Rightarrow k = x^4 - kx^3\Big|_0^1$

$\Rightarrow k = 1-k, \therefore k = \frac{1}{2}$

帶回原式得 $f(x) = 4x^3 - \frac{3}{2}x^2$

6. Sol: $\int_0^1 \left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right]dx$

$= \int_0^1 d(u(x)v(x))$

$= u(x)v(x)\Big|_0^1$

$= u(1)v(1) - u(0)v(0)$

$= 1-(-2) = 3$

7. Sol: 因為 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}(2+3x+e^{2x})$

$\Rightarrow f(x) = 3+2e^{2x}$

$\Rightarrow f'(x) = 4e^{2x}$

所以 $f(1) = 3+2e^2,\ f'(1) = 4e^2$

8. Sol:因為 $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt=\frac{d}{dx}(x^2+x^4)$

$\Rightarrow f(x^2)\cdot 2x=2x+4x^3$

$\Rightarrow f(x^2)=1+2x^2$

所以 $f(x)=1+2x$

習題 5-4

1. Sol:

(1) $\int(x^2-2x+3)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x+c$

(2) $\int -3x^2+2x+5dx=-x^3+x^2+5x+c$

(3) $\int x(\sqrt{x}-3)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-3x\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}x^2+c$

(4) $\int(\sqrt[3]{x}-2x)^2dx=\int\left(x^{\frac{1}{3}}-2x\right)^2dx=\int x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+4x^2dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{12}{7}x^{\frac{7}{3}}+\frac{4}{3}x^3+c$

(5) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dx=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x+c$

(6) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+c$

(7) $\int\frac{\sqrt{x}-1}{x^3}dx=\int x^{-\frac{5}{2}}-x^{-3}dx=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{-2}x^{-2}+c$

$=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{-2}+c$

(8) $\int\frac{7-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int 7x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}dx=7\times 3x^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c=21x^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+c$

2. Sol :因為 $f'(x)=3x^2+x$,則 $f(x)=\int 3x^2+xdx$

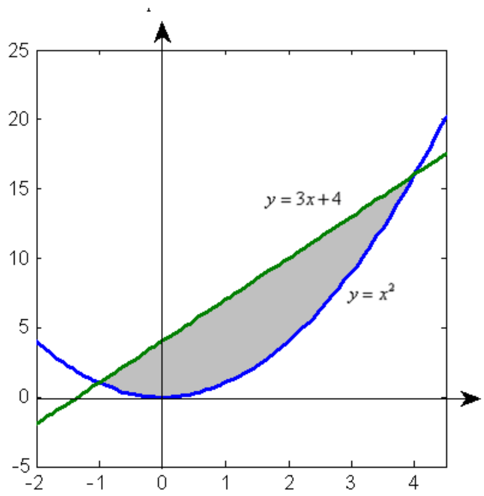
$\Rightarrow f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+c$

代入 $f(2)=7$ 得 $f(2)=8+2+c=7,\therefore c=-3$

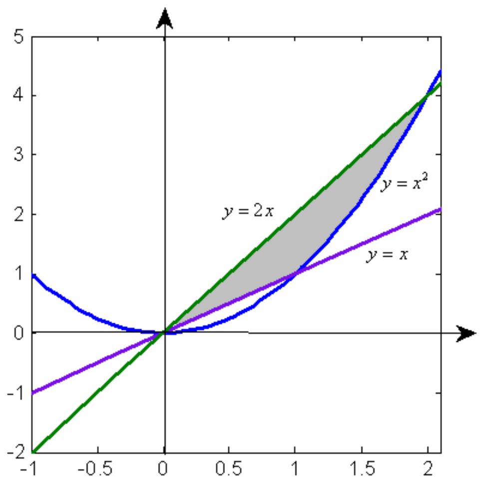
因此 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-3$

習題 5-5

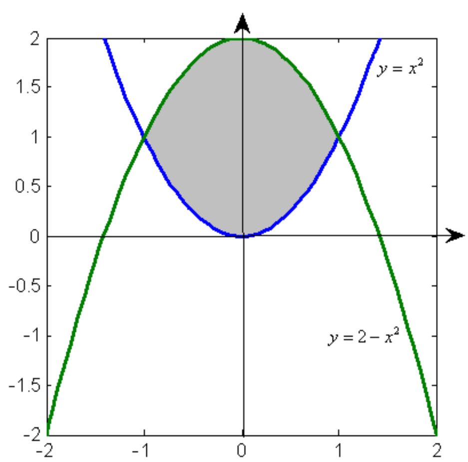
1. Sol: $A=\int_{-1}^{4}3x+4-x^2dx=\frac{3}{2}x^2+4x-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{4}=\frac{125}{6}$



2. Sol： $A=\int_0^1 2x-xdx+\int_1^2 2x-x^2dx=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+x^2-\frac{1}{3}x^3\Big|_1^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$

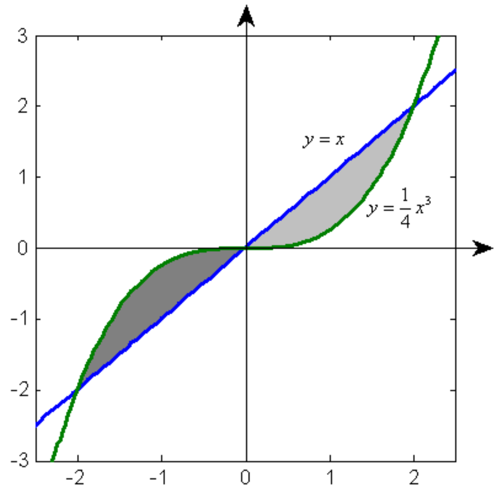


3. Sol： $A=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=\int_{-1}^{1}(2-2x^2)dx=2x-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$



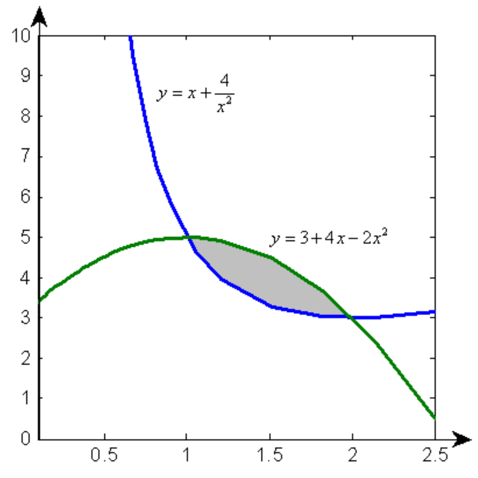
4. Sol：

$$A=\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}x^3-xdx+\int_{0}^{2}x-\frac{1}{4}x^3dx=2\int_{0}^{2}x-\frac{1}{4}x^3dx=2(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{16}x^4\Big|_0^2)=2\times1=2$$



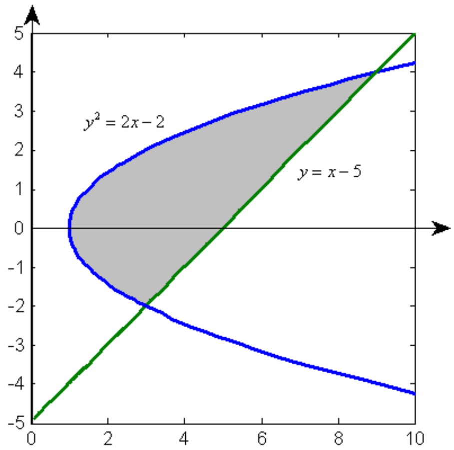
5. Sol： $A=\int_{1}^{2}(3+4x-2x^2)-(x+\frac{4}{x^2})dx$

$$=\int_{1}^{2}(3+3x-2x^2-\frac{4}{x^2})dx=3x+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{x}\Big|_1^2=\frac{5}{6}$$

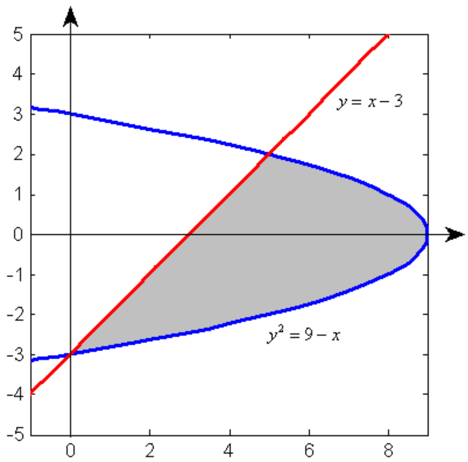


6. Sol： $A=\int_{-2}^{4}(y+5)-(\frac{y^2+2}{2})dy=\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}y^3\Big|_{-2}^{4}$

$$=\frac{1}{2}(16-4)+4(4-(-2))-\frac{1}{6}(64-(-8))=18$$

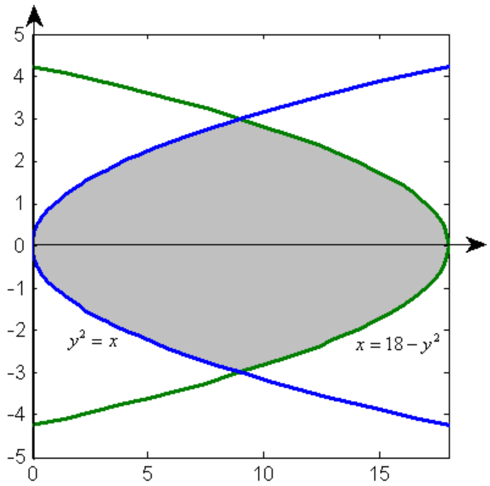


7. Sol : $A = \int_{-3}^{2} (9 - y^2) - (y+3)dy = 6y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \Big|_{-3}^{2} = \frac{125}{6}$



8. Sol : $A = \int_{-3}^{3} (18 - y^2) - (y^2)dy = \int_{-3}^{3} (18 - 2y^2)dy = 18y - \frac{2}{3}y^3 \Big|_{-3}^{3}$

$$= 18(3 - (-3)) - \frac{2}{3}(27 - (-27)) = 72$$



9. Sol: $A=\int_0^2 (4x-3)-(-x^2+4x-3)dx+\int_2^4 (-4x+13)-(-x^2+4x-3)dx$

$=\int_0^2 x^2dx+\int_2^4 (-8x+16+x^2)dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^2+(-4x^2+16x+\frac{1}{3}x^3)\Big|_2^4=\frac{8}{3}-4(16-4)+16(4-2)+\frac{1}{3}(64-8)=\frac{16}{3}$