5-1 黎曼和(Riemann Sum)

Σ符號

定義 1： 級數 $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$。

常用的Σ公式：

1. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

例 1. $1\times 4 + 2\times 7 + 3\times 10 + \cdots + n(3n+1) = \sum_{k=1}^{n} k(3k+1)$

Σ的性質：

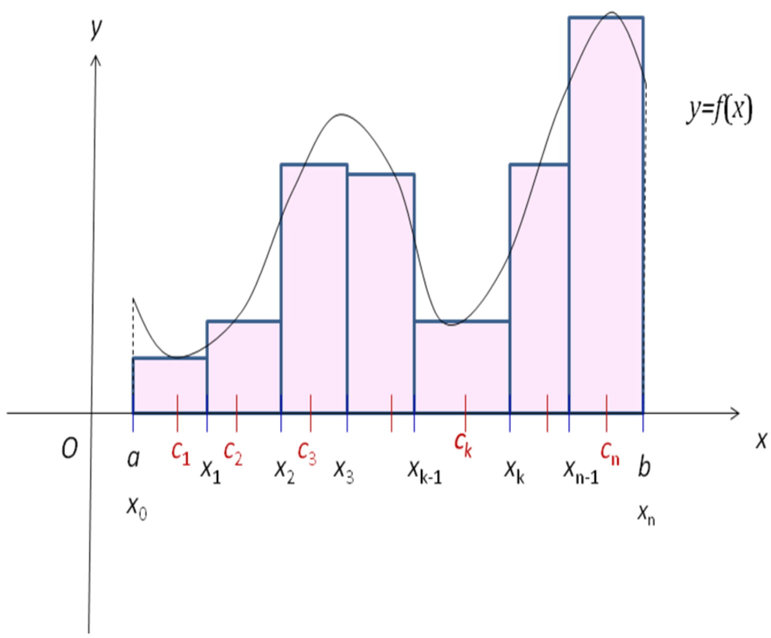
1. $\sum_{k=1}^{n} c = nc$

2. $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$

3. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

例 2. 求 $1\times4+2\times7+3\times10+\cdots+n(3n+1)$。

定義 2：黎曼和



設 f 為定義於 $[a,b]$ 閉區間之一函數，且

$P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 為 $[a,b]$ 之一分割.

取 $c_i\in[x_{i-1},x_i],\ \forall\ i=1,2,\cdots,n.$

令 $T=\{c_1,c_2,\cdots,c_n\}$，

則

$$S(f,P,T)=\sum_{i=1}^{n}f(c_i)\Delta x_i$$

稱為 f 關於 P 與 T 之黎曼和.

定義 3：假設 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 為區間 $[a,b]$ 的一分割，則分割 P 的範數(norm)為

$$\|P\|=\max\{|\Delta x_k|:k=1,2,\cdots,k\}$$

性質：若 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ 存在，此極限值是所圍區域的面積。

5-2 定積分

定義 1：若 $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = l$ 存在，$\forall P,T$，則稱此極限值為函數 f 在區間 $[a,b]$ 的定積分，記為 $\int_a^b f(x)dx$。此時，稱函數 f 在區間 $[a,b]$ 為可積分(integrable)。

例 1. 利用黎曼和求 $\int_{-1}^{2} 2xdx$。

例 2. 利用黎曼和求$\int_0^1 (2x^2 - 4x)dx$。　　（課本例 2，p190）

例 3. 試將$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3i^2+2ni\cos\frac{i}{n}}{n^3}$化為定積分。　　（課本例 1，p190）

例 4. 試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^6}{n^7}+\frac{2^6}{n^7}+\frac{3^6}{n^7}+\cdots+\frac{n^6}{n^7}\right)$。

例 5. 試證 $f:[0,1]\to R,\ f(x)=\begin{cases}0, & 若 x\in \boldsymbol{Q} \\ 1, & 若 x\in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}\end{cases}$, 不為黎曼可積。

定積分的性質： (p191)

若 f ，g 在區間 $[a,b]$ 為可積分函數，則

1. $\int_a^a f(x)dx=0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b kdx = k(b-a)$，k 為一常數

4. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$，$k$ 為一常數

5. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$，$a \le c \le b$

7. 若 $f(x) \ge 0, \forall x \in [a,b]$，則 $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

8. 若 $f(x) \ge g(x), \forall x \in [a,b]$，則 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

定理 1：（**中間值定理** intermediate value theorem）

設函數 f 在區間 $[a,b]$ 上為連續，且 $f(a) \ne f(b)$。若 K 為介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間之一數，

則 $\exists c \in (a,b) \ni f(c) = K$。

***定理 2：**（**積分均值定理** Mean value theorem for integral）（課本 p195）

設函數 f 在區間 $[a,b]$ 為連續，則 $\exists c \in (a,b) \ni \int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$。

證： $\because$ f 在 $[a,b]$ 區間為連續.

$\therefore$ f 有最大值 M 及最小值 m.

故 $m \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$

$$\Rightarrow mx\Big|_a^b \le \int_a^b f(x)dx \le Mx\Big|_a^b$$

$$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$$\Rightarrow m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le M$$

由中間值定理知: $\exists c \in [a,b] \ni f(c) = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

5-3 微積分基本定理

****定理 1：** 第一型微積分基本定理(The First Fundamental Theorem of Calculus)(p197)

假設函數 f 在 $[a,b]$ 為連續，若 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$，則 $G'(x)=f(x)$ ，$\forall x\in(a,b)$。

證：

$\forall x\in(a,b),$

$$
\begin{aligned}
G'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt+\int_x^a f(t)dt}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}
\end{aligned}
$$

設 $h>0$ 且 $[x,x+h]\subseteq[a,b]$ ，

因 f 在 $[a,b]$ 上為連續，所以 f 在 $[x,x+h]$ 上為連續；

故由於積分均值定理得知，

$$\exists z\in[x,x+h]\ni\int_x^{x+h}f(t)dt=f(z)(x+h-x)=f(z)h，$$

因此

$$
\begin{aligned}
G'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(z)h}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}f(z)\\
&=f(x)
\end{aligned}
$$

同理可證得 $h<0$ 之情形。

*****定理 2:** 第二型微積分基本定理(The Second Fundamental Theorem of Calculus)

假設函數 f 在 $[a,b]$ 為可積，若函數 $F:[a,b]\to \boldsymbol{R}$

滿足 $\forall x\in[a,b], F'(x)=f(x)$，則 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

證： 設 $G(x)=\int_a^x f(t)dt$，

由第一型微積分基本定理知，$G'(x)=f(x)$，

又 $F'(x)=f(x)$

$\therefore\ G'(x)=F'(x)$

$\Rightarrow G(x)=F(x)+C$

因此
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= G(b)-G(a)\\ &=(F(b)+C)-(F(a)+C)\\ &=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

例 1. 試計算 $\int_0^1 (3-5x^2)dx$。 (課本例 3, p192)

解：

$$\begin{aligned}\int_0^1 (3-5x^2)dx &= \int_0^1 3dx-\int_0^1 5x^2dx\\ &=\int_0^1 3dx-5\int_0^1 x^2dx\\ &=3(1-0)-5\cdot\frac{1}{3}\\ &=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

例 2. 試求 $\int_{-1}^3 |x-2|\,dx$。

練習： 試求 $\int_{-6}^5 |x^2-9|\,dx$。

例 3. 試求 $\int_0^n [x]dx$, 其中 [] 為高斯符號, $n\in \boldsymbol{N}$.。

例 4. 試求 $\int_1^3 [2x]dx$, 其中 [] 為高斯符號.。

練習： 試求 $\int_2^3 [x^2]dx$, 其中 [] 為高斯符號, $n\in \boldsymbol{N}$.

例 5. 試求 $\int_1^5 x(3x^2-1)^{12}dx$.。

例 6. 試求 $\int_0^1 xe^x dx$.。