22. 下列哪些平面互相平行？有沒有同一個平面的？

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ P_4: $z = 2x - y - 3$

23. 求點與平面的距離。

$(2, 8, 5)$, $x - 2y - 2z = 1$

24. 求兩條平行線的距離。

$z = x + 2y + 1$, $3x + 6y - 3z = 4$

25. 假設 a, b 及 c 不全為零。證明 $ax + by + cz + d = 0$ 表示的是一個平面，而且 $\langle a, b, c \rangle$ 是這個平面的法向量。

提示：假設 $a \neq 0$，把方程式寫成

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

10.6 柱面及二次曲面

前面我們已經討論過二種類型的曲線：平面（10.5 節）及球面（10.1 節）。在這一節我們要討論另外二種曲線：柱面及二次曲面。

通常描繪曲面的方法，是先了解這個曲面和平行於座標平面的平面相交的情形。它們相交的部分一般來說會是曲線，我們稱爲這個曲面的**軌跡 (traces)** 或**橫截面 (cross-sections)**。

柱面

一個柱面是由一群互相平行而且都和某一條平面曲線相交的直線所構成的。這條直線稱爲柱面的**母線 (rulings)**。

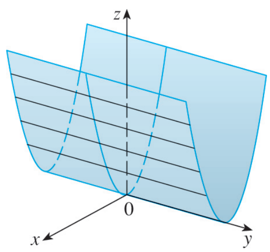


圖 1 由 $z = x^2$ 形成的曲面是抛物柱面

例 1 描繪曲面 $z = x^2$ 的圖形。

解

方程式 $z = x^2$ 和 y 無關，因此對任意方程式 $y = k$ 定義的垂直平面（與 xz 座標平面平行），都與這個曲面交於 $z = x^2$ 這條線。也就是說所有垂直的軌跡都是抛物線。在圖 1 中，我們先在 xz 平面上畫出抛物線 $z = x^2$，然後把這條抛物線沿著 y 軸的方向平移。所有這些抛物線形成的曲線稱為**抛物柱面 (parabolic cylinder)**。在這個例子中，所有的母線都和 y 軸平行。 ■

在例 1 中，方程式和 y 無關，而柱面的母線則是和 y 軸平行。這種例子非常常見。只要方程式和 x, y 或其中一個變數無關，得到的就會是一個柱面。

例 2　判斷下列曲面的形狀並描繪出它們的圖形。

(a) $x^2 + y^2 = 1$　　　　(b) $y^2 + z^2 = 1$

解

(a) 因為方程式 $x^2 + y^2 = 1$ 與 z 無關，在平面 $z = k$ 上得到的會是一個半徑為 1 的圓。所以 $x^2 + y^2 = 1$ 定義出來的是一個以 z 軸為中心軸的圓柱（見圖 2），而所有的母線都是垂直線。

(b) 因為方程式 $y^2 + z^2 = 1$ 與 x 無關，得到的是一個以 x 軸為中心的圓柱（見圖 3）。造法是把 yz 平面上的圓 $y^2 + z^2 = 1$ 沿著 x 軸平移得到的。

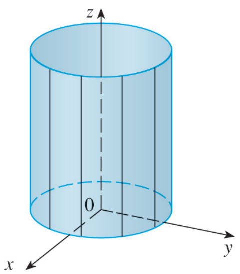


圖 2　$x^2 + y^2 = 1$

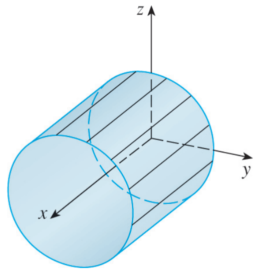


圖 3　$y^2 + z^2 = 1$　■

註　在處理曲面的問題時，要注意到像 $x^2 + y^2 = 1$ 一樣的方程式代表的是一個柱面而不是圓。而在 xy 平面上 $x^2 + y^2 = 1$ 的軌跡是方程式爲 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的圓。

二次曲面

一個二次曲面 **(quadric surface)** 是由三個變數 x, y 及 z 的二次函數在空間中定義出來的曲面。最一般的方程式爲

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

其中 $A, B, C, \ldots, J$ 都是常數。經過平移及旋轉後，可以把上面的式子化成標準型

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \text{ 或 } Ax^2 + By^2 + Iz = 0$$

三維空間中的二次曲面對應到的是二維平面上的二次曲線（9.5 節）。

例 3 用描繪軌跡的方式畫出二次曲面

$$x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$$

解

代入 $z=0$，得到在 xy 平面上的軌跡是橢圓 $x^2+y^2/9=1$。更一般來說，在平面 $z=k$ 上的軌跡是

$$x^2+\frac{y^2}{9}=1-\frac{k^2}{4}\qquad z=k$$

當 $k^2<4$ 或 $-2<k<2$ 時，這個軌跡是橢圓。

同樣的，在垂直方向的軌跡也是橢圓：

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1-k^2\qquad x=k\qquad (\text{若}-1<k<1)$$

$$x^2+\frac{z^2}{4}=1-\frac{k^2}{9}\qquad y=k\qquad (\text{若}-3<k<3)$$

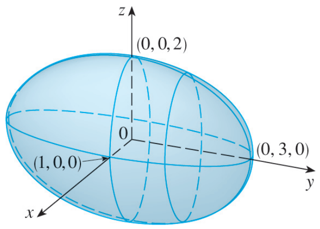


圖 4 橢球面 $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$

圖 4 就是這個曲面以及曲面上的一些軌跡。因為所有的軌跡都是橢圓，所以我們把這個曲面稱為**橢球面 (ellipsoid)**。特別的是它對每個座標軸都是對稱的，這從方程式中只有 x, y 及 z 都是偶數次的可以觀察到。 ■

例 4 用描繪軌跡的方式畫出曲面 $z=4x^2+y^2$。

解

代入 $x=0$ 會得到 $z=y^2$，所以在 yz 平面上的軌跡是拋物線。但是如果代入 $x=k$ 得到的軌跡是 $z=y^2+4k^2$。也就是說如果把曲面沿著平行 yz 平面的方向切片，每一片都是開口向上的拋物線。同樣的，在平面 $y=k$ 上的軌跡是開口向上的拋物線 $z=4x^2+k^2$。而在 $z=k$ 時得到的水平方向軌跡是橢圓 $4x^2+y^2=k$。所以曲面由這些軌跡就可以畫出來（見圖 5）。因為它的軌跡有的是拋物線有的是橢圓，所以這個曲面就稱為**橢圓拋物面 (elliptic paraboloid)**。

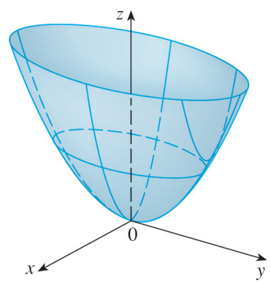


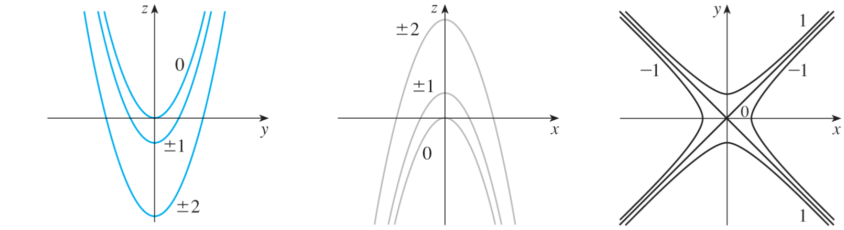
圖 5 曲面 $z=4x^2+y^2$ 是一個橢圓拋物面。水平的截面是橢圓；垂直截面是拋物線

■

例 5　描繪 $z = y^2 - x^2$ 定義的曲面。

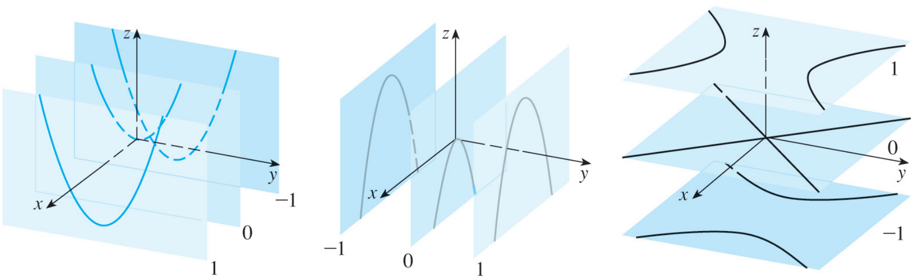
解

這個曲面在平面 $x = k$ 上的軌跡是開口向上的拋物線 $z = y^2 - k^2$，而在 $y = k$ 上是開口向下的拋物線 $z = -x^2 + k^2$。水平方向則是雙曲線 $y^2 - x^2 = k$。圖 6 是各個方向軌跡的形狀，圖 7 則是把這些軌跡畫在空間中正確的位置得到的圖形。



平面 $x = k$ 的截線為 $z = y^2 - k^2$　平面 $y = k$ 的截線為 $z = -x^2 + k^2$　平面 $z = k$ 截線為 $y^2 - x^2 = k$

圖 6　垂直截面是拋物線；水平截面是雙曲線。標示的數字為 k 的值



$x = k$ 中的軌跡　　$y = k$ 中的軌跡　　$z = k$ 中的軌跡

圖 7　將軌跡移回原來的平面

利用圖 7 所有的軌跡，就會得到 $z = y^2 - x^2$ 的圖形，像圖 8 一樣。我們稱這個曲面為**雙曲拋物面 (hyperbolic paraboloid)**，它在靠近原點的地方很像馬鞍。這個曲面在 12.7 節說明鞍點時會有更多的討論。

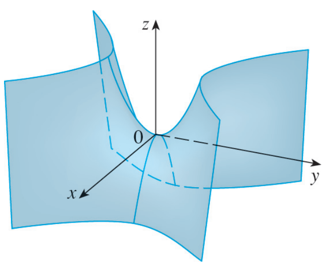


圖 8　曲面 $z = y^2 - x^2$ 是一個雙曲拋物面

例 6 描繪曲面 $\dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{4}=1$ 的圖形。

解

曲面在平面 $z=k$ 上的軌跡是橢圓

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1+\frac{k^2}{4}\qquad z=k$$

但是在 xz 及 yz 平面上是雙曲線

$$\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1\quad y=0\qquad 和\qquad y^2-\frac{z^2}{4}=1\quad x=0$$

這個曲面的圖形如圖 9 所示，稱為**單葉雙曲面 (hyperboloid of one sheet)**。■

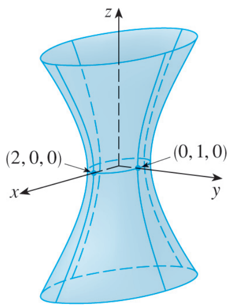
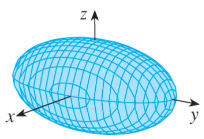
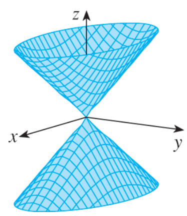
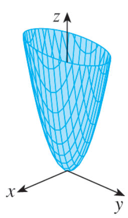
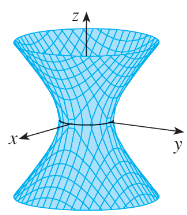
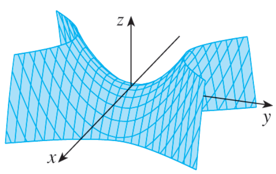
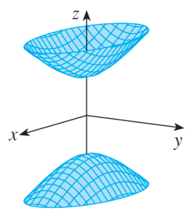


圖 9

電腦軟體在畫立體的圖時，就是用軌跡這個方法。大部分的軟體是取相等的間隔畫出 $x=k$ 及 $y=k$ 上的軌跡，而且不顯示被前面的圖形擋住的部分，這樣看起來比較有立體感。表 1 是用電

表 1 二次曲面圖

曲面	方程式	曲面	方程式
橢球面 	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所有軌跡為橢圓。如果 $a=b=c$，橢球面為一球面。	錐面 	$\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 水平軌跡為橢圓。如果 $k\neq 0$，在 $x=k$ 及 $y=k$ 平面方向的垂直軌跡為雙曲線；但 $k=0$ 時垂直軌跡為相交兩直線。
橢圓拋物面 	$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ 水平軌跡為橢圓。垂直軌跡為拋物線。具有一次方的變數是橢圓拋物面的中心軸。	單葉雙曲面 	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 水平軌跡為橢圓。垂直軌跡為雙曲線。對稱軸為係數小於 0 的變數對應的座標軸。
雙曲拋物面 	$\dfrac{z}{c}=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 水平軌跡是雙曲線。垂直軌跡是拋物線。圖示是 $c<0$ 的情況。	雙葉雙曲面 	$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 當 $k>c$ 或 $k<-c$ 時，在 $z=k$ 的軌跡為橢圓。垂直軌跡為雙曲線。式中的兩個負號告訴我們這個圖形有兩葉。

腦畫出的六種典型的二次曲面。其中所有的曲面都是對 z 軸對稱的。如果一個二次曲面是對其他座標對稱，只要把變數互換一下就可以了。

例 7　判斷二次曲面 $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$ 的類型。

解

取完全平方會得到

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

和表 1 的圖形與方程式比較，就知道它表示的是一個橢圓拋物面。但是現在這個拋物面的對稱軸平行 y 軸，而頂點則是移到 $(3, 1, 0)$ 這一點。曲面在平面 $y = k$ $(k > 1)$ 上的軌跡是橢圓

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

在 xy 平面上則是拋物線 $y = 1 + (x - 3)^2, z = 0$。圖 10 就是這個曲面的圖形。

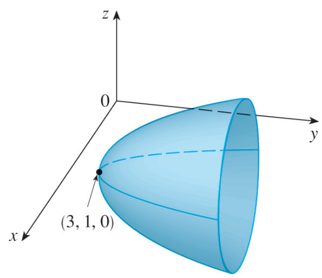


圖 10
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

10.6 習題

1. (a) 方程式 $y = x^2$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上表示的是那一條曲線？
(b) 這個方程式在 $\mathbb{R}^3$ 上表示的又是那一個曲面？
(c) 方程式 $z = y^2$ 描述的曲面是什麼？

2–4 ▪ 說明並描繪下列的曲面。

2. $y^2 + 4z^2 = 4$　　**3.** $x - y^2 = 0$

4. $z = \cos x$

5. (a) 找出曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 的軌跡並判斷它們的形狀。解釋為什麼這曲面是表 1 中雙曲面的一葉。
(b) 如果把 (a) 中的方程式改為 $x^2 - y^2 + z^2 = 1$，圖形會有什麼變化？
(c) 如果把 (a) 中的方程式改為 $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$ 呢？

6–10 ▪ 求出下列曲面在 $x = k, y = k$ 及 $z = k$ 上的軌跡。畫出曲面的圖形並判斷它的形狀。

6. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

7. $y^2 = x^2 + z^2$　　**8.** $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

9. $x^2 + 4z^2 - y = 0$　　**10.** $y = z^2 - x^2$

11–14 ▪ 把下列方程式化為標準形，判斷曲面的形狀並描繪出圖形。

11. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

12. $x = 2y^2 + 3z^2$

13. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

14. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

15. 畫出曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $x^2 + y^2 = 1$ 在 $1 \leq z \leq 2$ 時圍出的區域圖形。

16. 找出所有到 $(-1, 0, 0)$ 及平面 $x = 1$ 的距離相等的點形成的曲面的定義方程式，並判斷這個曲面的形狀。

17. 證明曲面 $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ 及 $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ 相交的曲線會落在同一平面上。