

電流、電阻與直流電路

University Physics

Chapter 15

黃元正製作 Slide 1

Key Concepts

- 15.1 電流的概
- 15.2 電 流
- 15.3 電阻與歐姆定律
- 15.4 電阻溫度計
- 15.5 特性曲線
- 15.6 串聯與並聯
- 15.7 電阻的串聯與並聯
- 15.8 電功率
- 15.9 電路簡介

黃元正製作 Slide 2

Key Concepts

- 15.10 克希荷夫定律
- 15.11 一個真實電池的模型
- 15.12 基本電子儀錶：伏特計、安培計與歐姆計
- 15.13 RC電路

黃元正製作 Slide 3

15.1 電流的概念

➤ 實驗1 一個電容與一個單擺

讓電容的兩平行板分別帶 $+Q, -Q$ 的電荷，並移去電源。在平行板間置一單擺，如圖15.1。平行板之左邊的板面被固定住，當作擺錘的小球用導電金箔包住。

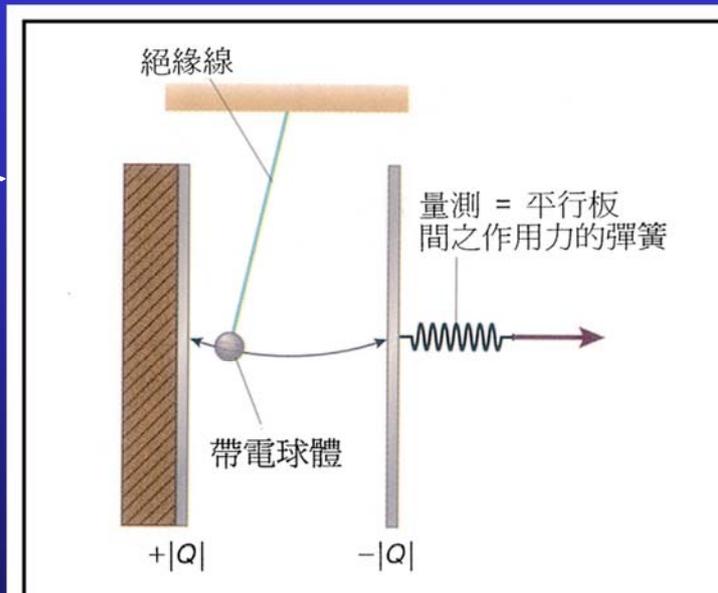


圖 15.1 利用一個彈簧來量測帶電電容器欲保持一定距離所需之作用力

黃元正製作 Slide 4

實驗2 一個電容、一個單擺與一個電源

- 現在，我們在上述實驗中，外加一個獨立電源，如圖15.2；重覆上述實驗。單擺也如同上述實驗，讓它擺動，我們由彈簧的伸縮可以發現，二平行板間彼此的作用力並沒有減弱。單擺無止境的來回搖擺。
- 電荷在線路中之移動，就如同流體在封閉的管線中流動一般。電池（或電源）扮演著pump的角色

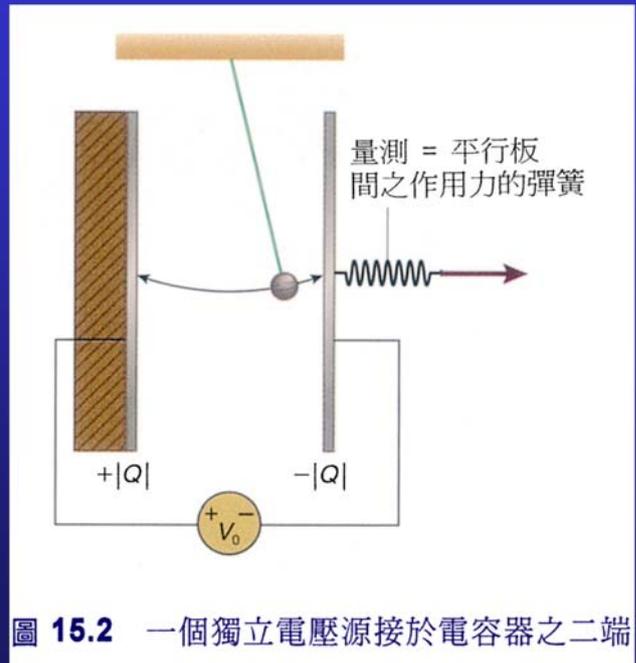


圖 15.2 一個獨立電壓源接於電容器之二端

黃元正製作 Slide 5

15.2 電 流

- 單位時間內電荷的流量被定義為電流 (electric current) I :

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

在SI單位制，電流單位為安培 (ampere, A)，或可以寫成C/s。

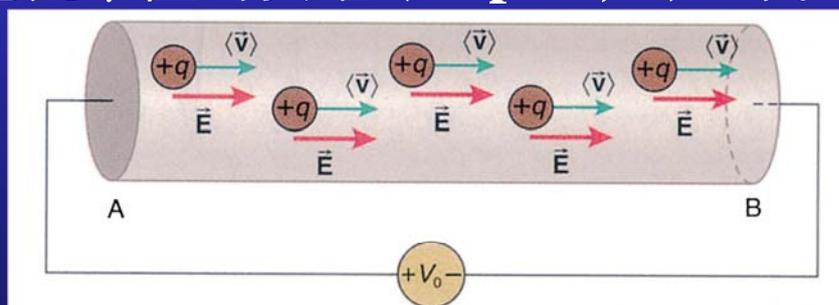


圖 15.3 一個獨立電壓源接於某一物質之二端，以維持電流流經該物質。

黃元正製作 Slide 6

平均漂移速率 (average drift speed)

- 以 n 表示運動載子的密度 (單位體積內載子的個數)。以 q 表示各載子的帶電量。若將物質想像成圓柱形，如圖 15.4。電流定義為電荷在單位時間的流量：

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$dQ = qnA \langle v \rangle dt$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = qnA \langle v \rangle$$

我們可以定義電流密度 (current density) 如下：

$$J = \frac{I}{A} = qn \langle v \rangle$$

$$\vec{J} = qn \langle \vec{v} \rangle$$

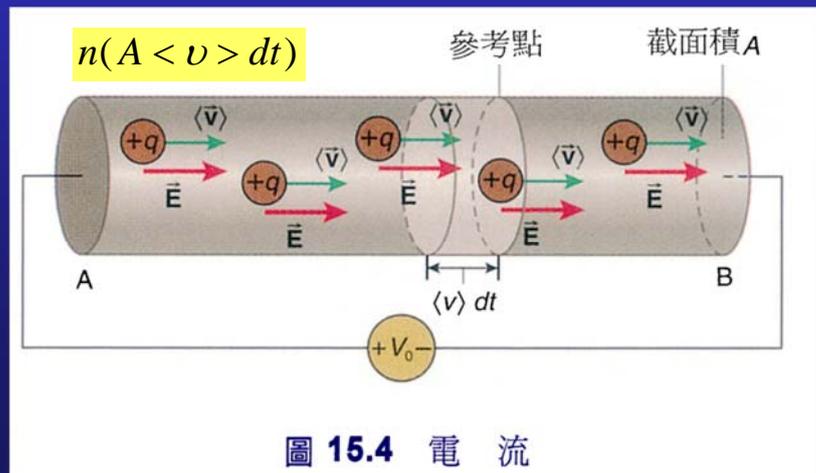


圖 15.4 電流

黃元正製作 Slide 7

電流

- 電流 I 可視為流經某一面積的電流密度之通量 (flux)：

$$I = \int_{\text{面積}} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$I = \int_{\text{截面積}} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J \int_{\text{截面積}} dS = JA$$

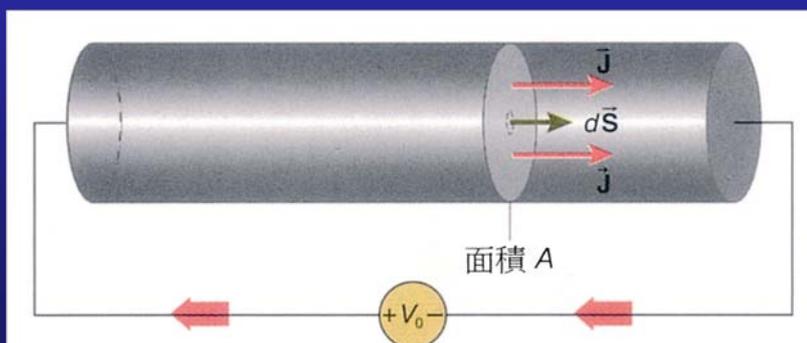


圖 15.5 流經某一截面的電流密度之通量即為電流

黃元正製作 Slide 8

例題 15.1

一銅線直徑2.05 mm，載有電流15.0 A

- a. 假設每一銅原子可提供一電子導電。試計算電子在該銅線之漂移速率。已知銅之密度為 $8.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，而其原子量為 63.5 g/mol 。
- b. 每一個載子在此導線前進1.00 m所需花的時間為何？

黃元正製作 Slide 9

解：

- a. 1 m^3 的Cu所包含的Cu個數為

$$\frac{8.93 \times 10^3 \text{ kg/m}^3}{63.5 \times 10^{-3} \text{ kg/mole}} = 1.41 \times 10^5 \text{ mol/m}^3$$
$$(1.41 \times 10^5 \text{ mol/m}^3)(6.02 \times 10^{23} \text{ 原子數/mol})$$
$$= 8.49 \times 10^{28} \text{ 原子/m}^3$$
$$n = 8.49 \times 10^{28} \text{ 電子/m}^3$$

$$A = \pi r^2$$
$$= \pi[(2.05 \times 10^{-3} \text{ m})/2]^2$$
$$= 3.30 \times 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\langle v \rangle = \frac{I}{qnA} = \frac{15.0}{(1.602 \times 10^{-19})(8.49 \times 10^{28})(3.30 \times 10^{-6})}$$
$$= 3.34 \times 10^{-4} \text{ (m/s)}$$

- b. 電子走1 m之需時為

$$t = \frac{1.00}{3.34 \times 10^{-4}} = 2.99 \times 10^3 \text{ (s)}$$
$$\approx 49.8 \text{ (min)}$$

黃元正製作 Slide 10

15.3 電阻與歐姆定律

- 圖15.6 A、B兩點間之電位差由定義(13.9)式可寫為

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V \equiv V_A - V_B = E\ell$$

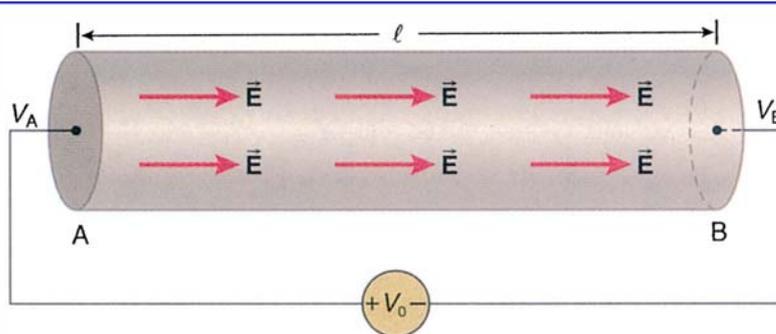


圖 15.6 接上一獨立電壓源之物質

由實驗上發現，很多物質其電流密度與外加的電場大小成正比：

$$J = \sigma E$$

其中 σ 為一比例常數，一般稱為物質的導電係數 (conductivity)。這類的物質稱之為歐姆物質 (ohmic materials)；上式為歐姆定律 (Ohm's law) 的另一型式。

黃元正製作 Slide 11

電阻與歐姆定律

$$J = \sigma E$$

$$V = E\ell = \frac{J}{\sigma} \ell$$

$$V = I \frac{\ell}{\sigma A}$$

若將導電係數之倒數稱為電阻率：

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma}$$



$$V = I \frac{\rho \ell}{A}$$

我們定義電阻 (resistance) R

$$R = \frac{\rho \ell}{A}$$

在SI單位制中，電阻單位為 V/A ，為了紀念德國物理學家歐姆 (Georg Simon Ohm, 1787-1854)，又將電阻單位稱為歐姆 (ohms, Ω)。

黃元正製作 Slide 12

表 15.1 物質在 20°C 時之電阻率與電阻率之溫度係數

物 質	電阻率 $\rho(\Omega \cdot m)$	電阻率之溫度係數 $\alpha(K^{-1})$
Al	2.82×10^{-8}	3.9×10^{-3}
C	3500×10^{-8}	-0.5×10^{-3}
Cu	1.77×10^{-8}	3.8×10^{-3}
Ge	0.46	-48×10^{-3}
Au	2.44×10^{-8}	3.4×10^{-3}
玻璃	$\sim 10^{12}$	
鐵	10×10^{-8}	5.0×10^{-3}
鉛	22×10^{-8}	4.3×10^{-3}
水銀	96×10^{-8}	0.9×10^{-3}
鎳鉻鐵合金	100×10^{-8}	0.4×10^{-3}
白金	10×10^{-8}	3.92×10^{-3}
矽	640	-75×10^{-3}
銀	1.59×10^{-8}	3.8×10^{-3}
鎢絲	5.6×10^{-8}	4.5×10^{-3}

物質在 20°C 時之電阻率與電阻率之溫度係數

- 導線之編號，20°C 時，導線直徑與截面積
- 表15.2列舉了一些不同編號的電阻所對應的直徑與截面積。你可以由表格中計算出不同編號之電阻的電阻值大小。一般家庭用之電線為14號，而廚房與浴室之電線多為12號，因其需要大電流。8號電線則用於烤箱與乾衣機。

表 15.2 導線之編號，20°C 時，導線直徑與截面積

編號	直 徑	面 積
0	8.25 mm = 8.25×10^{-3} m	53.5×10^{-6} m ²
2	6.54 mm = 6.54×10^{-3} m	33.6×10^{-6} m ²
4	5.19 mm = 5.19×10^{-3} m	21.1×10^{-6} m ²
6	4.12 mm = 4.12×10^{-3} m	13.3×10^{-6} m ²
8	3.26 mm = 3.26×10^{-3} m	8.37×10^{-6} m ²
10	2.59 mm = 2.59×10^{-3} m	5.26×10^{-6} m ²
12	2.05 mm = 2.05×10^{-3} m	3.31×10^{-6} m ²
14	1.63 mm = 1.63×10^{-3} m	2.08×10^{-6} m ²
16	1.29 mm = 1.29×10^{-3} m	1.31×10^{-6} m ²
18	1.02 mm = 1.02×10^{-3} m	0.823×10^{-6} m ²
20	0.812 mm = 0.812×10^{-3} m	0.517×10^{-6} m ²
22	0.664 mm = 0.664×10^{-3} m	0.326×10^{-6} m ²
24	0.511 mm = 0.511×10^{-3} m	0.205×10^{-6} m ²
26	0.405 mm = 0.405×10^{-3} m	0.129×10^{-6} m ²
28	0.321 mm = 0.321×10^{-3} m	0.081×10^{-6} m ²

歐姆定律

- 跨於歐姆物質二端之電位差與流經它的電流成正比，此即**歐姆定律**。

$$V = IR$$



圖 15.7 線路中的電阻符號

- 線路中之理想電阻如圖15.7所示。一般說來，把線路本身之電阻值視為0

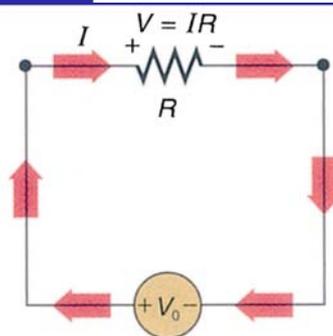


圖 15.8 一般將電流流入電阻的一方之極性取為“正”

黃元正製作 Slide 15

歐姆定律

- 根據歐姆定律，一個理想電阻器，跨於其兩端之電位差與流經電阻器之電流應該成一線性關係。假如我們將電流對電位差作圖，即可得一直線；此直線之切線的斜率即為電阻的導數，參考圖15.9。

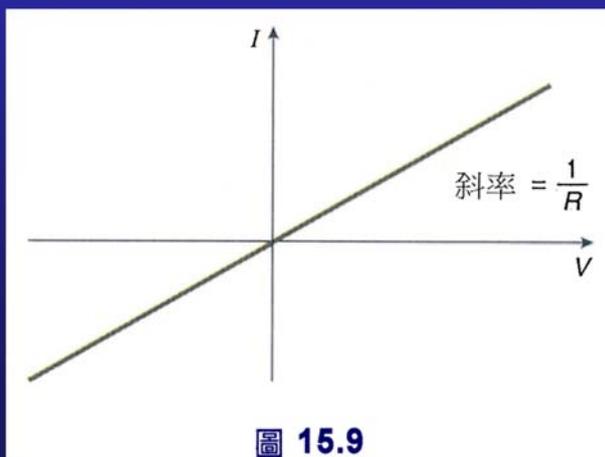


圖 15.9

黃元正製作 Slide 16

色碼電阻

- 從色帶的最左邊開始，前面兩個顏色分別對應十位數與個位數，第三個顏色對應科學記號中，10的指數。每個顏色對應的數字可參考表15.3。電阻值的大小為二位數乘上10的乘冪。亦即

$$[\text{十位數 個位數}] \times 10^{\text{次方}}$$

表 15.3 電阻之色碼

顏色	數字	指數之次方
黑	0	$10^0 = 1$
棕	1	10^1
紅	2	10^2
橙	3	10^3
黃	4	10^4
綠	5	10^5
藍	6	10^6
靛	7	10^7
紫	8	10^8
白	9	10^9

顏色	誤差容忍度
金色	5%
銀色	10%
無第四個色碼	20%

黃元正製作 Slide 17

色碼電阻

- 舉例來說，圖15.10中之電阻器之色碼為棕 - 黑 - 紅 - 金，十位數由棕色來決定，個位數由黑色來決定，10的指數對應紅色。

$$\text{棕} = 1, \text{黑} = 0, \text{紅色} = 2$$

亦即前二位數為 [10]，10的次方為 (2)。此色碼電阻的電阻值為

$$[10] \times 10^{(2)} \Omega = 1.0 \text{ k}\Omega$$

而金色則指出此色碼電阻之真實電阻值的大小在 $1000 \pm 5\% \Omega$ 的範圍內。也就是 950Ω 到 1050Ω 間。

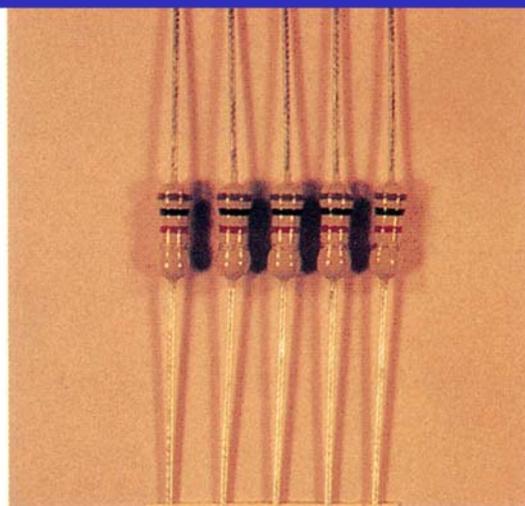


圖 15.10 1kΩ之色碼電阻，其色帶顏色依序為棕、黑、紅、金。金色表示誤差容忍度。

黃元正製作 Slide 18

例題 15.2

計算長度為10.0 m之12號銅線的電阻值。

黃元正製作 Slide 19

解：

依據 (15.13) 式

$$R = \frac{\rho \ell}{A}$$

分別由表15.1與15.2查得12號銅線的電阻率與截面積，代入 (15.13) 式，即得

$$\begin{aligned} R &= \frac{(1.77 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m})(10.0 \text{ m})}{3.31 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \\ &= 5.35 \times 10^{-2} \Omega \end{aligned}$$

由此計算結果可知即便是一條長銅線，其電阻值仍是很小，確實可以理想導線來處理。

黃元正製作 Slide 20

15.4 電阻溫度計

- 對很多歐姆材質而言，在一特定之溫度範圍內，電阻率 ρ 和電阻 R 與溫度成線性關係。根據實驗可找出下列的關係式：

$$\rho = \rho_0[1 + \theta(T - T_0)]$$

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

式中之 α 為電阻率之溫度係數 (temperature coefficient of resistivity)。不同材質之 α 於表15.1。 R_0, ρ_0 分別為在參考溫度 T_0 之電阻與電阻率。電阻隨著溫度變化的特性被應用到電阻溫度計；在醫學上與物理實驗室常用

- 在電阻溫度計中，藉由量測電阻的大小，即可找到其對應的溫度。因電阻與外界環境達熱平衡時，由式 (15.16) 得到的溫度，同時也是外界環境的溫度。

黃元正製作 Slide 21

15.5 特性曲線

- 流經電子元件之電流對電子元件二端之電位差所作的圖稱為該電子元件的特性曲線。
- 電位差往往是最容易控制的，所以電位差常被拿來當作橫軸，而以電流為縱軸。從歐姆定律 (15.14) 式，理想電阻的特性曲線 (I 對 V 作圖)

$$I = \frac{1}{R} V$$

應為傾斜直線，如圖 15.11。理想電阻被稱為線性電子元件，因其特性曲線為直線且斜率為正；斜率為電阻值的倒數。

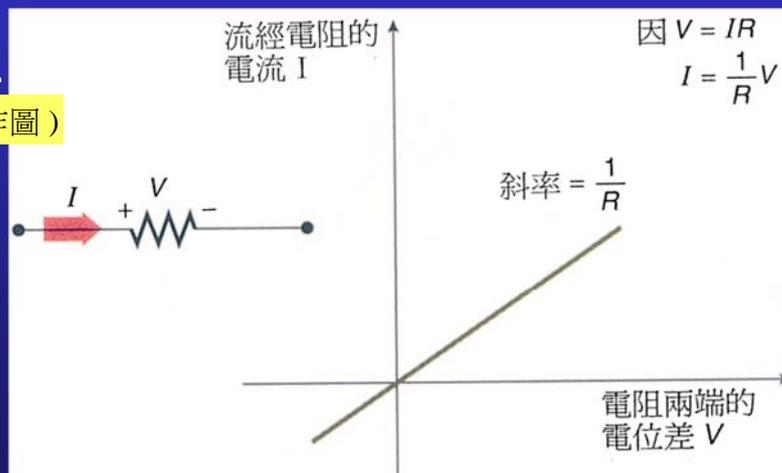
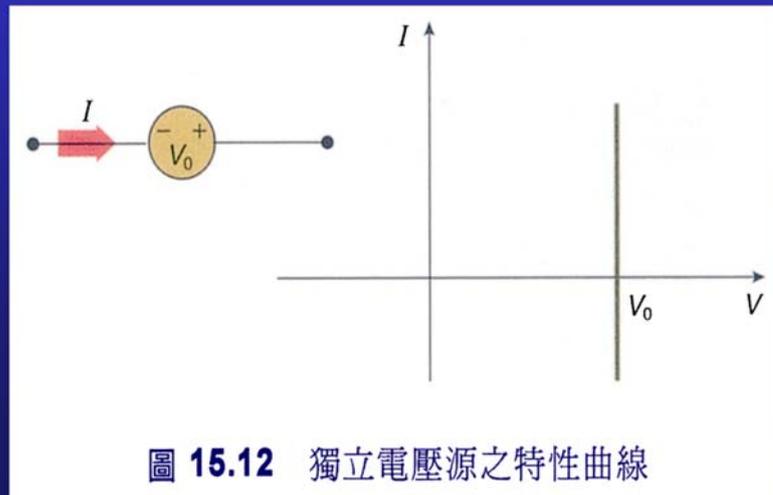


圖 15.11 電阻的特性曲線

黃元正製作 Slide 22

特性曲線

- 一個獨立電壓源（如理想電池）之特性曲線為一垂直線如圖15.12。理想的電池之內電阻為0，因其特性曲線的斜率為無限大。



黃元正製作 Slide 23

特性曲線

- 另一個非線性的元件之特性曲線如圖15.13。此元件為半導體，是pn接面。由於此特性曲線上各點的斜率不等，亦即各點之電阻值都不一樣，任一點的電阻值可表為

$$R \equiv \frac{1}{\frac{dI}{dV}} = \frac{dV}{dI}$$

- 對pn接面而言，電阻值會因外加的電位差而有所不同。一個理想的電阻之電阻值則不會因外加電位差而有所改變，因其特性曲線為一直線，斜率只有一個。

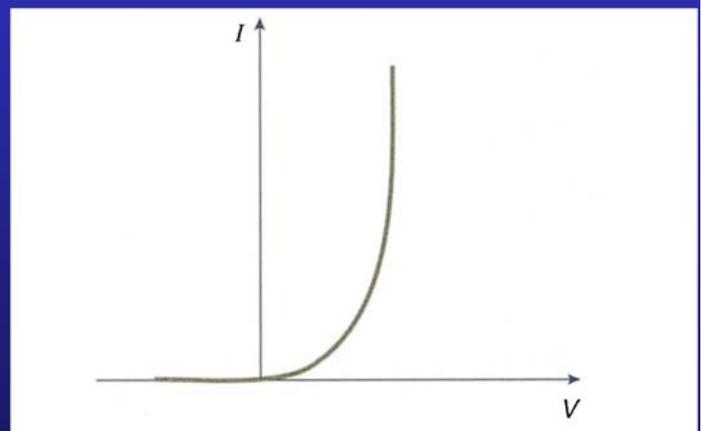


圖 15.13 半導體 pn 接面之非線性特性曲線

黃元正製作 Slide 24

15.6 串聯與並聯

- ▶ 我們從電流的觀點來看電路串聯。既然電荷是守恒的，流經串聯電路的各元件之電流應是相等的。電流從線路的這一頭進去，必從另一端出來，就如水在單一水管內流動一般。
 - ▶ 流經串聯線路之各電子元件的電流必相等。
 - ▶ 並聯線路之各電子元件的電位差必相等。

黃元正製作 Slide 25

15.7 電阻的串聯與並聯

你家的電燈泡是並聯的；而聖誕樹上各個彩色燈泡是串聯的。我們將討論如何計算串聯電阻或並聯電阻的等效電阻。

- ▶ 電阻的串聯
- ▶ 電阻的並聯

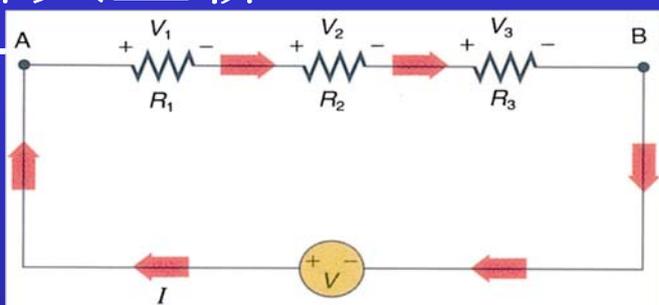


圖 15.14 三電阻的串聯電路

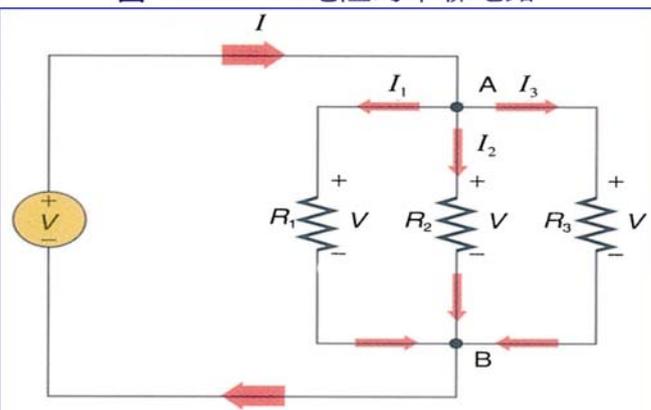


圖 15.16 三個並聯電阻電路

電阻的串聯

圖15.14即是一個三個電阻串聯的線路。我們用一個等效電阻來取代三個串聯的電阻如圖15.15。

$$V_1 = IR_1 \quad V_2 = IR_2 \quad V_3 = IR_3$$

$$V = IR_{eq}$$

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

$$IR_{eq} = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

$$\rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

串聯電阻之等效電阻為各串聯電阻的和。

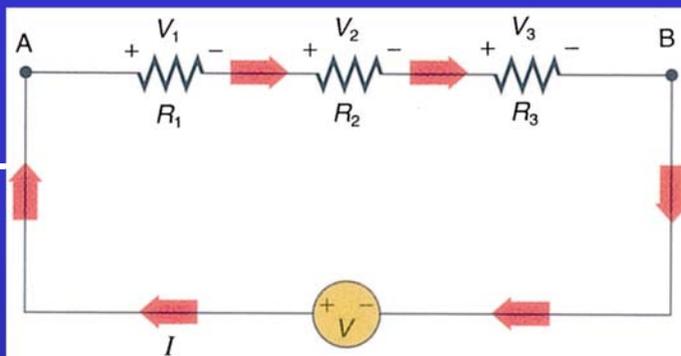


圖 15.14 三電阻的串聯電路

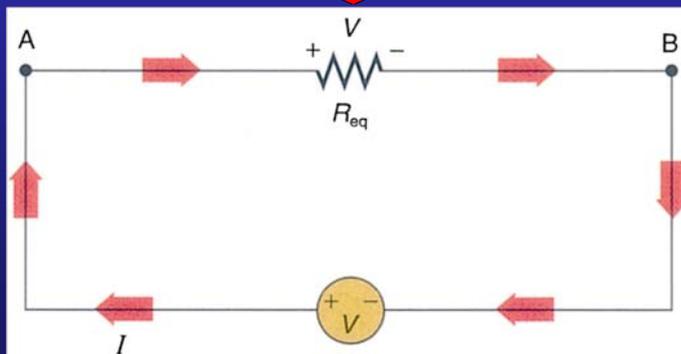


圖 15.15 A 與 B 間的等效電阻

電阻的並聯

圖15.16即是一個三個電阻串聯的線路。我們用一個等效電阻來取代三個串聯的電阻如圖15.17

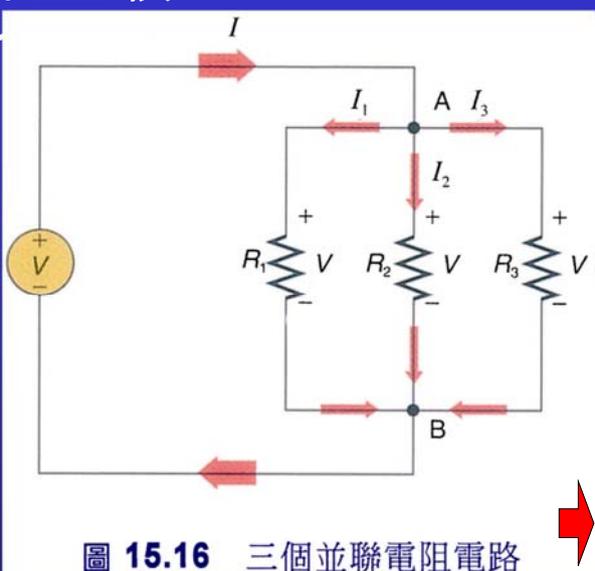


圖 15.16 三個並聯電阻電路

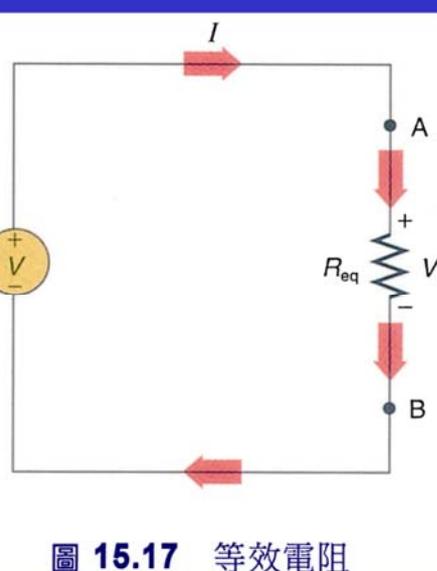


圖 15.17 等效電阻

$$V = I_1 R_1 \quad V = I_2 R_2 \quad V = I_3 R_3 \quad \text{又} \quad V = IR_{eq}$$

$$\rightarrow I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

電阻的並聯與電容的串聯很相似

例題 15.3

試計算圖15.18中之A與B間的等效電阻？

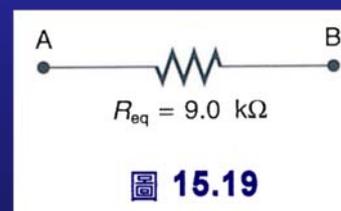


黃元正製作 Slide 29

解：

圖中之電阻是串聯，其等效電阻可利用 (15.20) 式計算得：

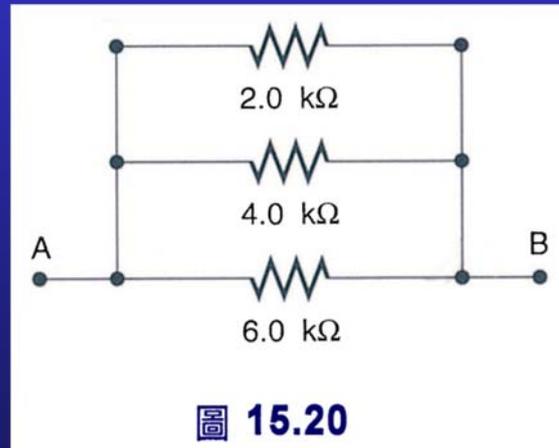
$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= 1.0 + 3.0 + 5.0 \\ &= 9.0(\text{k}\Omega) \end{aligned}$$



黃元正製作 Slide 30

例題 15.4

試計算圖15.20中A與B間之等效電阻？



黃元正製作 Slide 31

解：

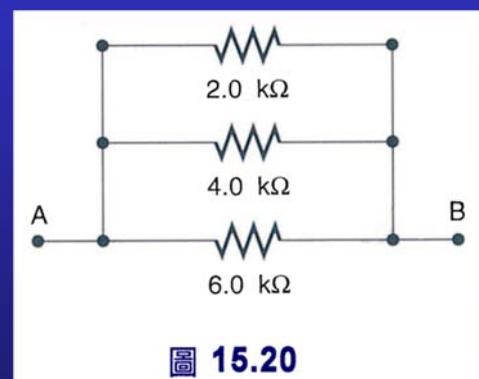
既然三個電阻都接於A與B，所以這三個電阻是並聯的。

利用 (15.24) 式

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{2.0} + \frac{1}{4.0} + \frac{1}{6.0} = \frac{11}{12.0}$$

→

$$R_{\text{eq}} = \frac{12.0}{11} = 1.1(\text{k}\Omega)$$



黃元正製作 Slide 32

15.8 電功率

- 你書桌上的燈泡可能是**100 W**或**200 W**。一個燈泡標示的功率即為該燈泡點亮時，其所消耗並釋放給周圍環境的能量。
- 要計算電子元件消耗的電功率，必須先考慮電荷流經電子元件時之電位能的變化是時間的函數。因此，我們來看電位差為之線路圖**15.21**

，A點之電位高於B點， $V = V_A - V_B$

$$dU = dQV_B - dQV_A = dQ(V_B - V_A) = dQ(-V)$$

$$P = \frac{dQ}{dt}V$$

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

$$P = IV$$

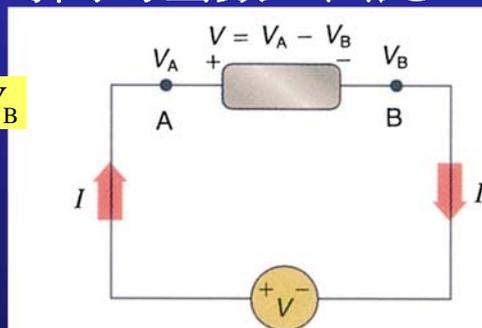


圖 15.21 電子元件二端之電位差 V

黃元正製作 Slide 33

電功率 $P = IV$

- 電子元件消耗電功率 **P** 等於電流 **I** 與電位差 **V** 的乘積
- 電流必須是從電子元件的高電位端 (+) 流進元件，如圖**15.22**。

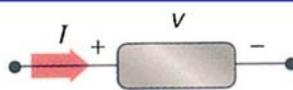


圖 15.22 對 (15.25) 式而言，電流的流向應由高電位 (+) 端流入元件。

- 對電阻來說，吸收來的能量增加了其熱能，使電阻變熱。



圖 15.23 電流的不同表示法

- 若一個獨立電壓源，吸收了正功率，它會將能量以另一種形式貯存起來（如化學能）。一個獨立的電壓源吸收正的電功率稱為充電。因此獨立電壓源被稱為電源供應器 (power supplies)，也就是用來提供電功率（單位時間的電位能）。

黃元正製作 Slide 34

常用的單位

- 能量（單位時間內）守恒表線路中所有電子元件所吸收的總功率必為零

整個線路的總吸收功率 = 0

- 一般常用的單位瓩瓦·小時 (kilowatt-hour) 常出現在電力公司給用戶的帳單中。

1 kilowatt - hour 相當於功率

1000 W 被用了 1 小時

- 1 kW·h 是能量單位，不是功率單位。

$$\begin{aligned} 1 \text{ kW} \cdot \text{h} &= (1000 \text{ W})(1 \text{ h}) \\ &= (1000 \text{ J} / \text{s})(3600 \text{ s}) \\ &= 3.600 \times 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

黃元正製作 Slide 35

例題 15.5

一個 12.0 V 的獨立電壓源與 10.0 Ω 的電阻連接如圖 15.24。

- 試計算流經電阻之電流。
- 試計算電阻吸收之功率。
- 試計算電壓源吸收之功率。
- 試證整個線路總吸收功率是 0 W。

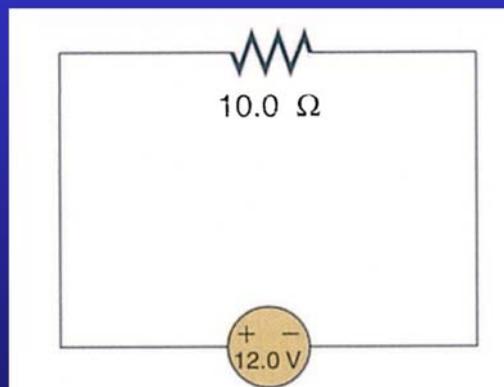


圖 15.24

黃元正製作 Slide 36

解-1：

a. 由歐姆定律

$$V = IR$$

$$12.0 = I(10.0)$$

$$I = 1.20 \text{ (A)}$$

流經電阻的電流是從高電位的一端流向低電位的那一端，電流的方向如圖15.25所示。

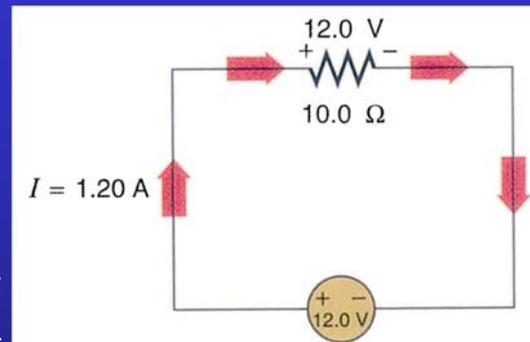


圖 15.25

b. 電阻消耗的電功率 P_{res}

$$\begin{aligned} P_{\text{res}} &= IV \\ &= (1.2)(12.0) \\ &= 14.4 \text{ (W)} \end{aligned}$$

黃元正製作 Slide 37

解-2：

c. 獨立電壓源所消耗的電功率為從正端流入的電流與跨於電源兩端之電位差的乘積，電流**1.20 A**是由電源正端流出，相當於**-1.20 A**的電流流入電源正端，如圖15.26，所以我們可計算獨立電壓源所吸收的功率為

$$\begin{aligned} P_{\text{source}} &= (-1.20)(12.0) \\ &= -14.4 \text{ (W)} \end{aligned}$$

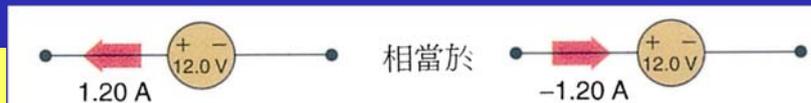


圖 15.26

功率為負表示電子元件產生功率，而將此功率轉移給其它元件。

d. 整個線路中，所有元件的總功率為

$$\begin{aligned} P_{\text{total}} &= P_{\text{res}} + P_{\text{source}} \\ &= 14.4 + (-14.4) \\ &= 0 \text{ (W)} \end{aligned}$$

黃元正製作 Slide 38

15.9 電路簡介

- 當我們把電荷的運動與電路元件加以應用就是當今的電子學。
- 在這章我們只介紹**類比電子學**，我們關心流經不同電路元件的電流大小，與電路元件兩端之電位差。一般家用電路、手電筒都是屬於類比電子學。而類比電子學又細分為兩部份：

1. **直流電路**：簡單的說，電路中流經電路元件的電流，和電路元件二端之電位差均與時間無關，如圖15.27所示。

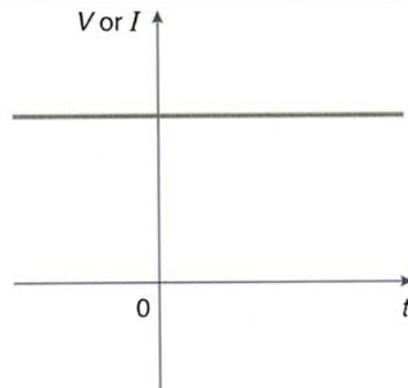


圖 15.27 直流線路中電流與電位差都與時間無關

電路簡介

2. **交流電路**：電路中流經各電路元件的電流大小和跨於電路元件二端之電位差是時間的函數，見圖15.28。

- 我們首先探討直流電路，直流電路的基本概念也可以運用於交流電路中。

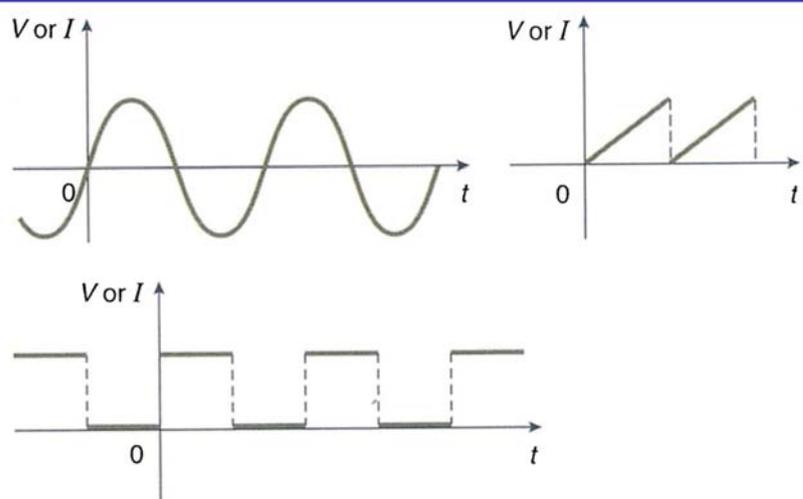


圖 15.28 交流電路中，電流與電位差均與時間有關。

15.10 克希荷夫定律

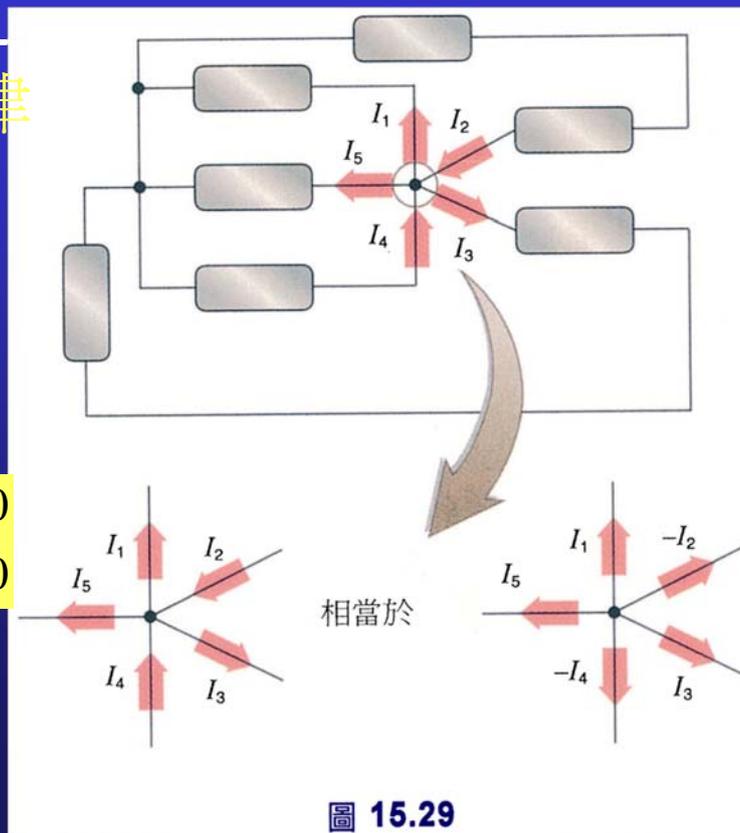
➤ 克希荷夫電流定律

克希荷夫電流定律 (Kirchhoff Current Law; KCL)：流出電路中任一節點的電流代數和為零。

$$I_1 + (-I_2) + I_3 + (-I_4) + I_5 = 0$$

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 = 0$$

- KCL即是電荷守恒。
KCL可運用到線路中任一節點。



克希荷夫定律

➤ 克希荷夫定壓定律

克希荷夫電壓定律 (Kirchhoff Voltage Law; KVL)：任一封閉迴路之電位差的代數和為零。

“電壓”其實指的是電位差。

- KVL繞著該迴路一圈，且將其經過的每一個元件的電位差做代數和，其中要注意的三原則列舉如下：
1. 我們可以順時或逆時方向來繞迴路一圈。
 2. 從何處當起始點並不重要。
 3. 假如我們先碰到電子元件的“+”端則此電位差取為正值，若先碰到元件的“-”端則此電位差取為負值。
- KVL即是能量守恒。

定壓定律

- 所以在圖15.30中，假如我們從左下角依順時方向，由KVL寫下下式：

$$V_1 + (-V_2) + (-V_3) + V_4 = 0$$

$$V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$$

- 假如我們從左下角而依逆時針方向繞迴路一圈，由KVL寫下下式

$$(-V_4) + V_3 + V_2 + (-V_1) = 0$$

$$-V_4 + V_3 + V_2 - V_1 = 0$$

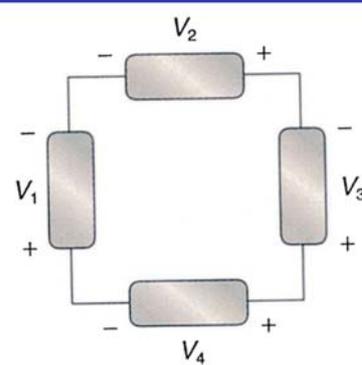


圖 15.30 線路中之基本迴路

定壓定律

- 在圖15.31中，有3個基本的迴路。這三個迴路用灰色把它標出來如圖15.32中1、2、3灰色區域。另外4個比較複雜的迴路如圖15.33中所示之四個灰色區域。

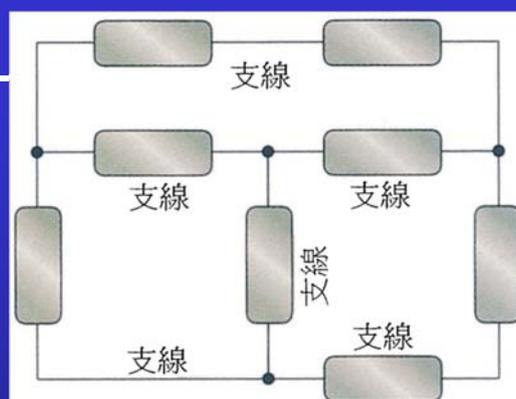


圖 15.31 線路之支線

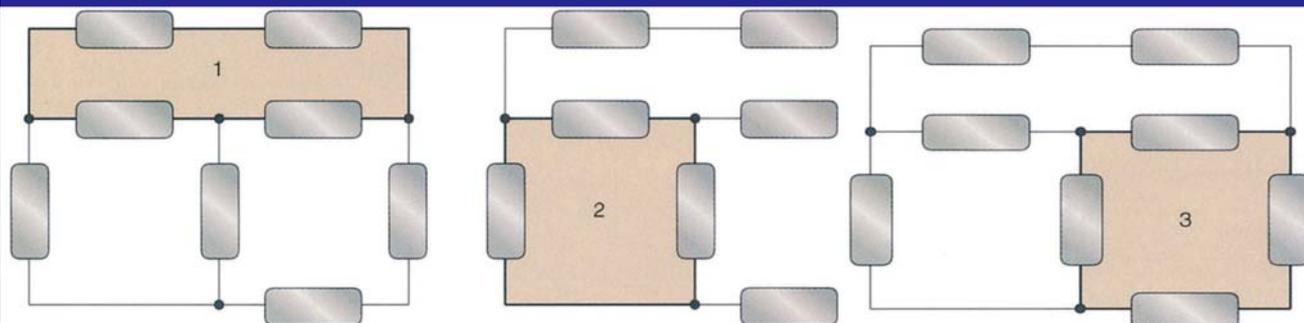


圖 15.32 圖 15.31 之基本迴路

➤ 在圖15.31中，另外4個比較複雜的迴路如圖15.33中所示之四個灰色區域。

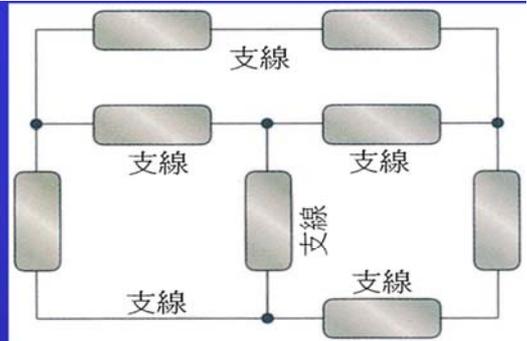


圖 15.33 四個複雜迴路

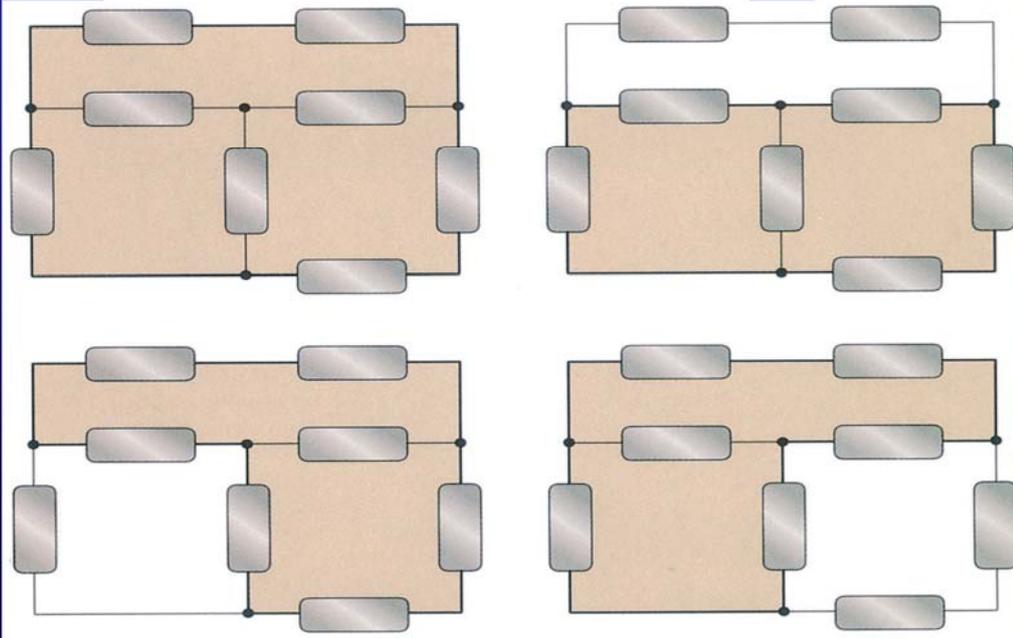


圖 15.31 線路之支線

黃元正製作 Slide 45

解決直流電路的幾個基本步驟

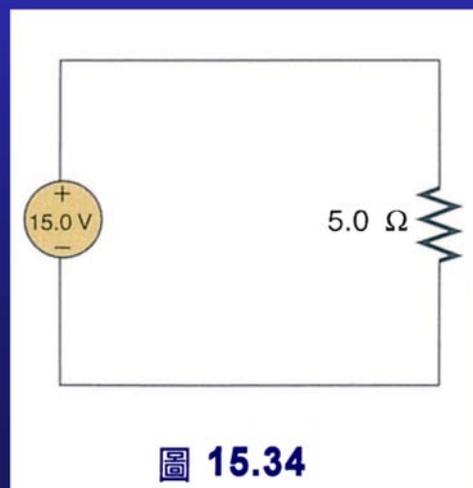
1. 先將線路中，串聯或並聯電阻簡化成等效電阻。串聯或並聯的獨立電壓源也可先化簡。畫下最簡化的線路。
2. 標出簡化線路中的節點。這些節點連結了三個或三個以上的電子元件。只連結兩個元件的節點不是真正的節點。
3. 選定簡化線路中每一個不同支線的電流方向，並對每一支線標示 I_1, I_2, \dots 等不同變數，我們會試著去解這些電流值。
4. 考慮電流的方向，依選定電流的方向標示電阻的“+”或“-”的極性 (polarity)。電流流入電阻的一端標示 (+) 端，電流流出電阻的那一端標為 (-) 端。
5. 將KVL應用到線路中每一個基本迴路。
6. 選定一些重要的節點 (連接3個或3個以上的電子元件)，利用KCL寫下一些方程式。
7. 解方程式，即可計算出未知電流值。假如你所得電流值為負，即表示線路中真正電流的方向與你最先選定電流的方向為反向。

黃元正製作 Slide 46

例題 15.6

考慮只有一個獨立電源（理想電池）及一個電阻的線路。

- 計算線路中之電流。
- 計算各電子元件吸收的功率。

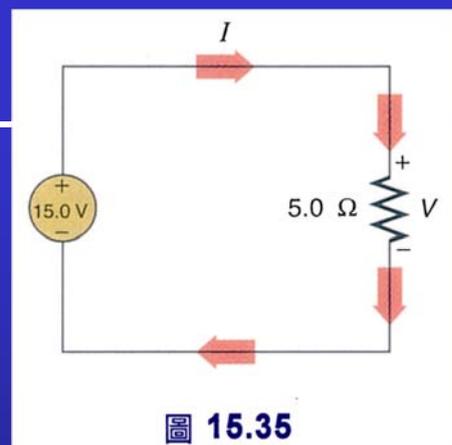


黃元正製作 Slide 47

解：

- 電源二端之電位差為15.0 V，電阻二端之電位差亦應為15.0 V。由歐姆定律

$$\begin{aligned} V &= IR \\ 15.0 &= I(5.0) \\ I &= 3.0 \text{ A} \end{aligned}$$



- 電子元件的吸收功率為流經該元件之電流與元件二端電位差的乘積，對電阻而言

$$\begin{aligned} P_{\text{res}} &= IV = (3)(15.0) \\ &= 45 \text{ (W)} \end{aligned}$$

對電源而言

$$\begin{aligned} P_{\text{bat}} &= IV = (-3.0)(15.0) \\ &= -45 \text{ (W)} \end{aligned}$$

整個線路的總功率為

$$P_{\text{total}} = -45 + 45 = 0 \text{ (W)}$$

黃元正製作 Slide 48

例題 15.7

線路如圖15.36。

- 簡化線路（愈簡單愈好）。
- 計算線路中電子元件二端之電位降及流經該電子元件的電流。
- 計算各電子元件之吸收功率，並證明線路中各元件的總吸收功率為零。

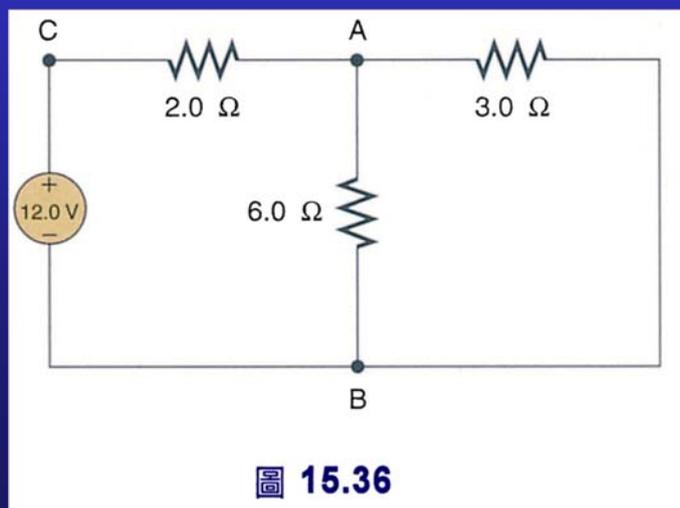


圖 15.36

黃元正製作 Slide 49

解-1：

- 電阻 $3.0\ \Omega$ 與 $6.0\ \Omega$ 是並聯的電阻，此二並聯電阻的等效電阻為

$$\frac{(3.0)(6.0)}{3.0 + 6.0} = 2.0\ (\Omega)$$

將圖15.36線路圖化簡為等效電路圖15.37。圖15.37中兩個 $2.0\ \Omega$ 的電阻是串聯的，所以它們的等效電阻為

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 = 2.0 + 2.0 \\ &= 4.0\ (\Omega) \end{aligned}$$

現在線路已簡化成圖15.38，圖中之節點C與B，對應原來線路圖中之C與B。

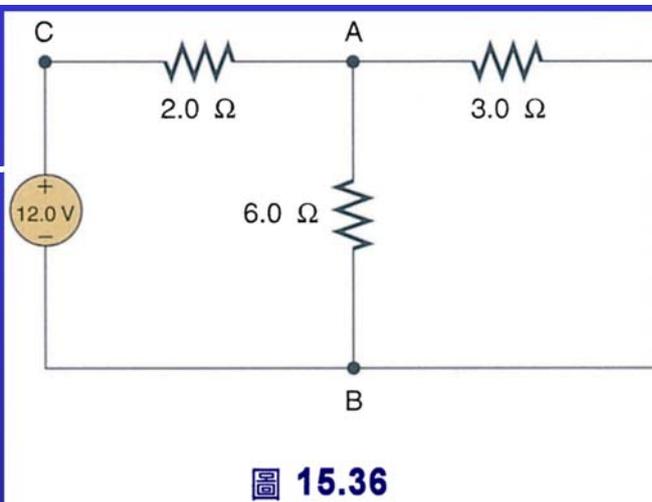


圖 15.36

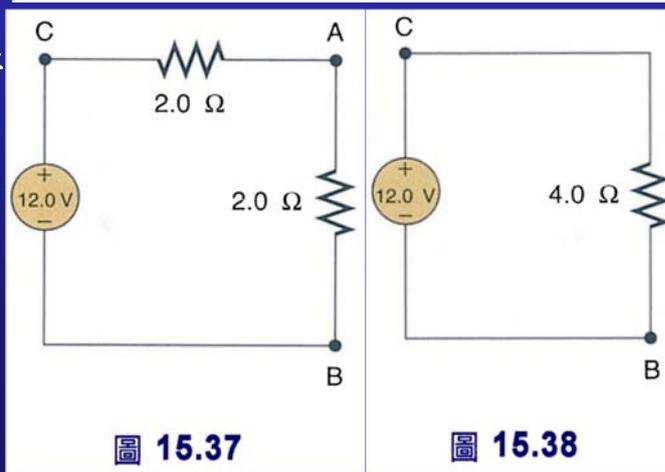


圖 15.37

圖 15.38

解-2：

b. 運用歐姆定律於 $4.0\ \Omega$ 之電阻：

$$V = IR$$

$$12.0 = I(4.0)$$

$$I = 3.0\ (\text{A})$$

$$V_{AB} = 12 - IR_{2\Omega} = 12 - (3.0)(2.0) = 6.0\ (\text{V})$$

3.0 Ω 電阻

6.0 Ω 電阻

$$6.0 = I_3 (3.0)$$

$$6.0 = I_6 (6.0)$$

$$I_3 = 2.0\ (\text{A})$$

$$I_6 = 1.0\ (\text{A})$$

我們已分別計算出流經各電子元件的電流與各電子元件兩端的電位差。我們可將這些結果標於圖15.40中。

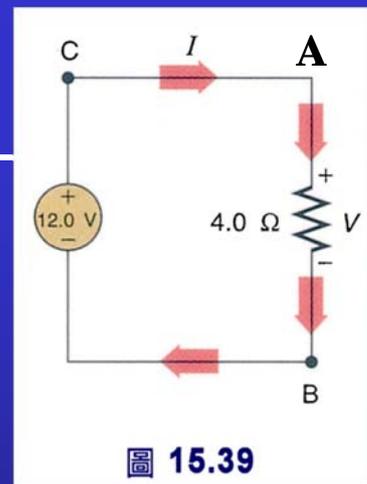


圖 15.39

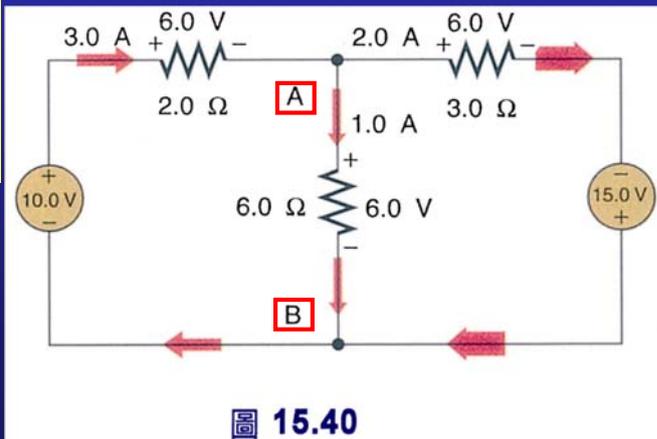


圖 15.40

黃元正製作 Slide 51

解-3：

c.

$$P = IV$$

$$2.0\ \Omega \text{ 的電阻} : P_{2\Omega} = (3.0)(6.0) = 18\ (\text{W})$$

$$3.0\ \Omega \text{ 的電阻} : P_{3\Omega} = (2.0)(6.0) = 12\ (\text{W})$$

$$6.0\ \Omega \text{ 的電阻} : P_{6\Omega} = (1.0)(6.0) = 6.0\ (\text{W})$$

$$P_{\text{bat}} = (-3.0)(12) = -36\ (\text{W})$$

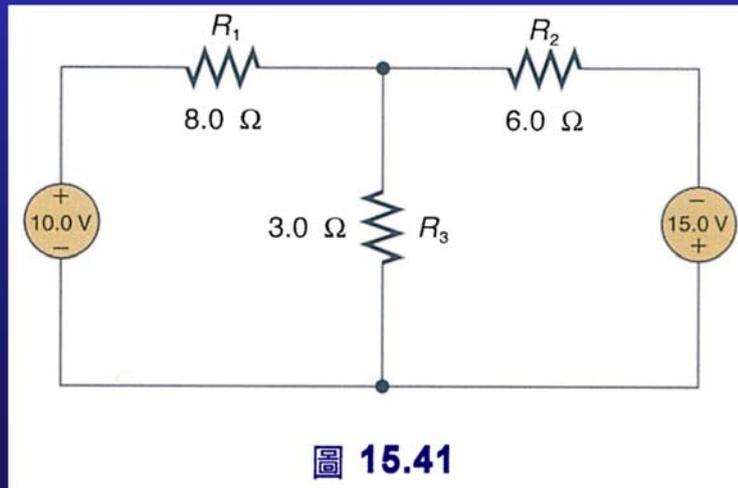
$$\begin{aligned} & P_{\text{bat}} + P_{2\Omega} + P_{3\Omega} + P_{6\Omega} \\ &= -36 + 18 + 12 + 6.0 \\ &= 0\ (\text{W}) \end{aligned}$$

故得證，總吸收功率為零。

黃元正製作 Slide 52

例題 15.8

- 考慮圖15.41之線路，試計算
- 各電子元件之電流。
 - 跨於各電子元件的電位差。
 - 各電子元件所吸收的功率。



黃元正製作 Slide 53

解-1：

- a. 由KVL
迴路1

$$-I_3(3.0) + I_2(6.0) - 15.0 = 0$$

$$6.0I_2 - 3.0I_3 = 15.0$$

迴路2

$$-10.0 + I_1(8.0) + I_3(3.0) = 0$$

$$8.0I_1 + 3.0I_3 = 10.0$$

由KCL

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

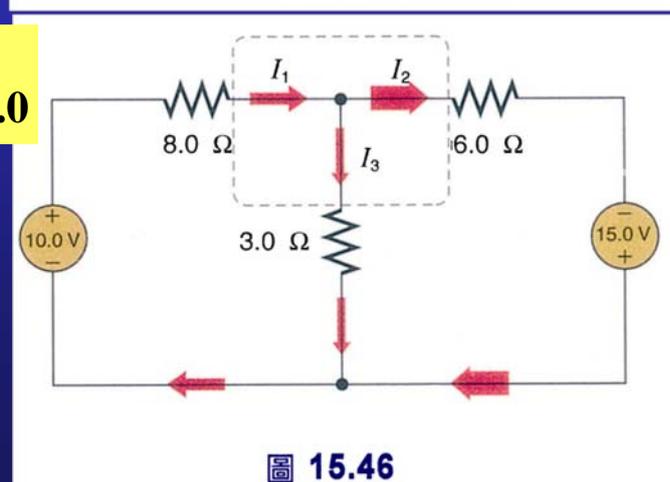
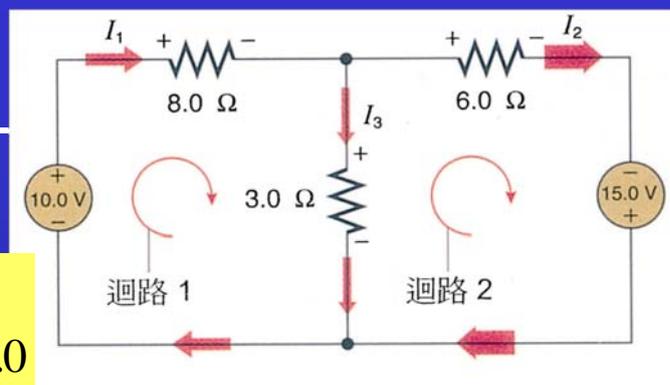
解三個方程式，即可得

→

$$I_1 = 1.5 \text{ A}$$

$$I_2 = 2.2 \text{ A}$$

$$I_3 = -0.67 \text{ A}$$



黃元正製作 Slide 54

解-2：

b. 有了電流值，我們可計算各電阻二端之電位差分別計算如下：

$$V_1 = I_1 R_1 = (1.5)(8.0) = 12 \text{ (V)}$$

$$V_2 = I_2 R_2 = (2.2)(6.0) = 13 \text{ (V)}$$

$$V_3 = I_3 R_3 = (-0.67)(3.0) = -2.0 \text{ (V)}$$

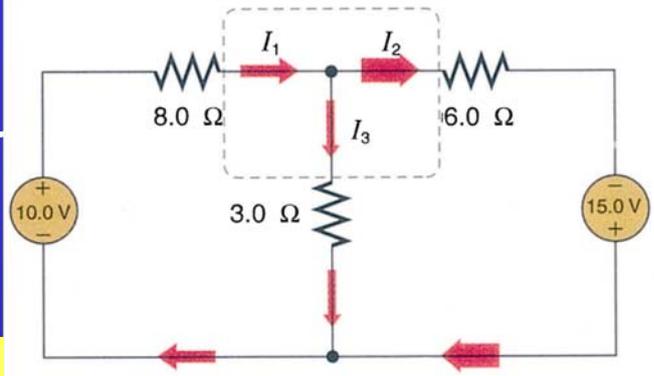


圖 15.46

c. 我們計算線路中各電子元件吸收的功率。

$$P_{8.0\Omega} = I_1 V_1 = (1.5)(12) = 18 \text{ (W)}$$

$$P_{15.0V} = (-2.2)(15.0) = -33 \text{ (W)}$$

$$P_{10.0V} = (-1.5)(10.0) = -15 \text{ (W)}$$

$$P_{6.0\Omega} = I_2 V_2 = (2.2)(13) = 29 \text{ (W)}$$

$$P_{8\Omega} + P_{6\Omega} + P_{3\Omega} + P_{15V} + P_{10V} = 18 + 29 + 1.3 - 33 - 15 = 0 \text{ (W)}$$

$$P_{3.0\Omega} = (-0.67)(-2.0) = 1.3 \text{ (W)}$$

黃元正製作 Slide 55

例題 15.9

假如你有一個電動勢為之獨立電壓源 V_0 (理想電池) 和兩個電阻 R_1, R_2 。若想讓電阻吸收功率達最大值，這兩個電阻應串聯或並聯？(參考圖 15.47 與圖 15.48)

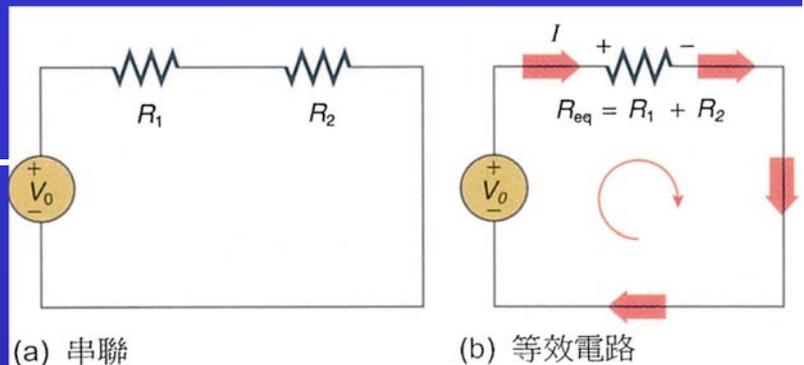


圖 15.47

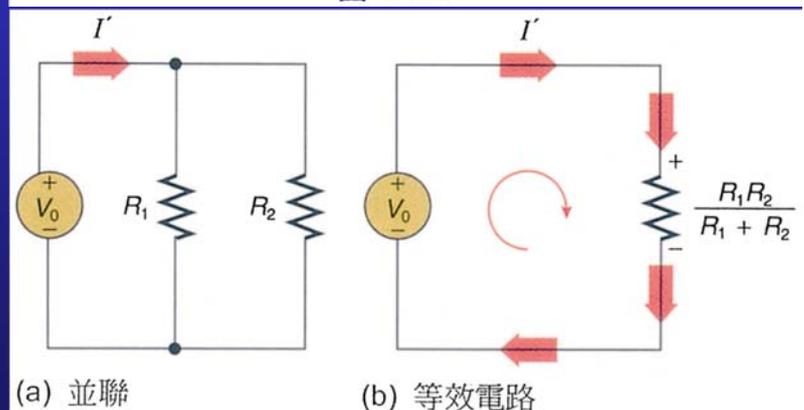


圖 15.48

黃元正製作 Slide 56

解-1：

可以分三個步驟來解這個問題。(1) 計算電阻串聯的吸收功率 (2) 計算電阻並聯的吸收功率 (3) 比較串、並聯的吸收功率。

1.串聯：

$$-V_0 + I(R_1 + R_2) = 0$$

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2}$$

等效電阻之吸收功率為

$$P_{\text{res series}} = IV = \left[\frac{V_0}{R_1 + R_2} \right] V_0 \\ = \frac{V_0^2}{R_1 + R_2}$$

黃元正製作 Slide 57

解-2：

2.並聯：

等效電阻之吸收功率為

$$-V_0 + I' \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0$$

$$I' = \frac{V_0(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}$$

$$P_{\text{res parallel}} = I'V = \left[\frac{V_0(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} \right] V_0 \\ = V_0^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

3.計算並、串聯電阻吸收功率的比值

$$\frac{P_{\text{res parallel}}}{P_{\text{res series}}} = \frac{V_0^2 \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}{\frac{V_0^2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1 R_2} \\ = \frac{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1 R_2}{R_1 R_2}$$

很顯然，分子大於分母。所以電阻並聯時之吸收功率大於串聯時之吸收功率。

黃元正製作 Slide 58

15.11 一個真實電池的模型

- 一個獨立電壓源如理想電池，它的電流—電壓特性曲線如圖15.49所示。此電壓源二端的電位差與流經它的電流大小無關，始終是 V_0 。
- 真實電池 (real batteries) 有如圖15.49之理想特性。真實的電池在線路中會變熱；這顯示它們會從電荷中吸收電位能。

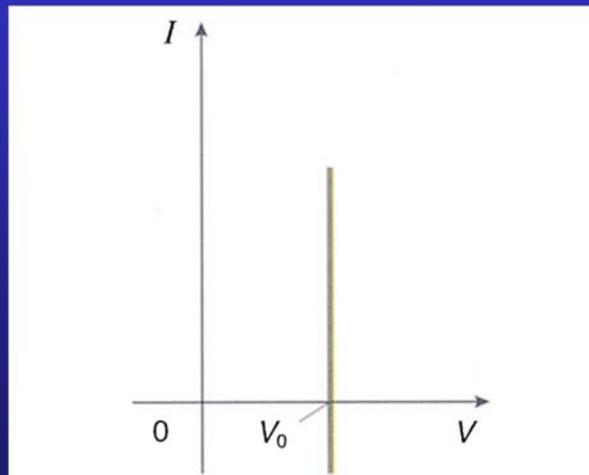


圖 15.49 理想電池之特性曲線

黃元正製作 Slide 59

一個真實電池的模型

- 真實電池 (real batteries) 一個理想電池最好的近似為：將它以一個獨立電壓源與一個電阻串聯來看待，如圖15.50。此串聯的電阻稱為電池的內電阻 (internal resistance)。當電流流經真實電池，此內電阻一定會吸收功率。
- 一個新的真實電池的內電阻 r 是非常的小。當電流 $I > 0$ ，此有限的內電阻會使得端電位差 V_{term} 所在圖15.51中之特性曲線偏離垂直線而呈現負斜率。

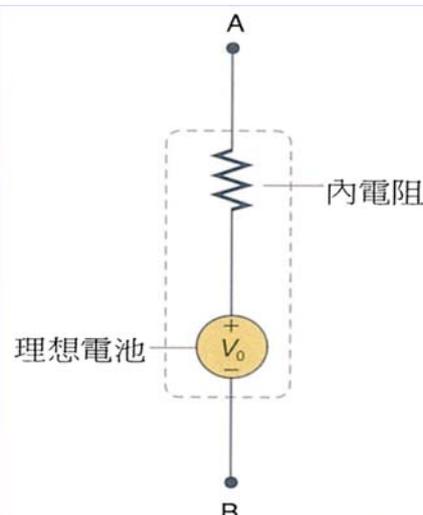


圖 15.50 真實電池的模型

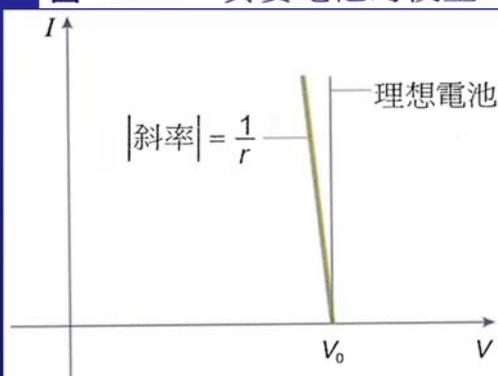


圖 15.51 真實電池之特性曲線

端電位差

- 將一真實電池外接一個電池(如手電筒之燈泡)，而形成一單迴路，如圖15.52。這個外接電阻一般稱為負載電阻 (load resistor)。

$$-V_0 + Ir + IR = 0$$

$$I = \frac{V_0}{R+r}$$

$$V_{\text{term}} = V_0 - Ir$$

$$V_{\text{term}} = V_0 - \frac{V_0}{R+r}r = V_0 \frac{R}{R+r}$$

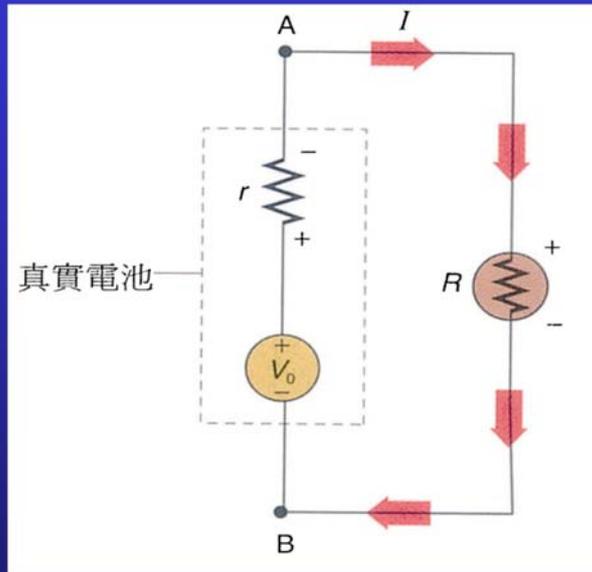


圖 15.52 一個真實電池外接一電阻

黃元正製作 Slide 61

$$V_{\text{term}} = V_0 - \frac{V_0}{R+r}r = V_0 \frac{R}{R+r}$$

$$r \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V_{\text{term}} = 0$$

- 當一個真實電池用過一段時間， r 值變大。當 $r \rightarrow \infty$ ，電流與端電位差 (參考 (15.33) 式) 趨近於0。

$$r \rightarrow 0$$

$$I_{\text{sc}} = \frac{V_0}{r}$$

$$P_r = I_{\text{sc}}^2 r = \frac{V_0^2}{r}$$

- 因 r 甚小，此功率 P_r 會很大。功率瞬間加大會使電池溫度外速上升而導致電池爆炸。

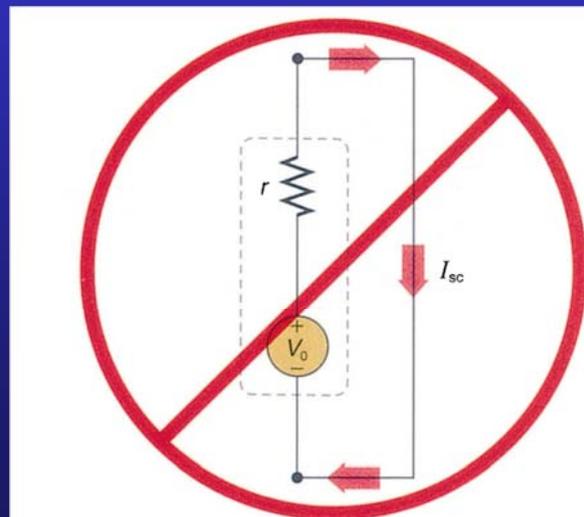
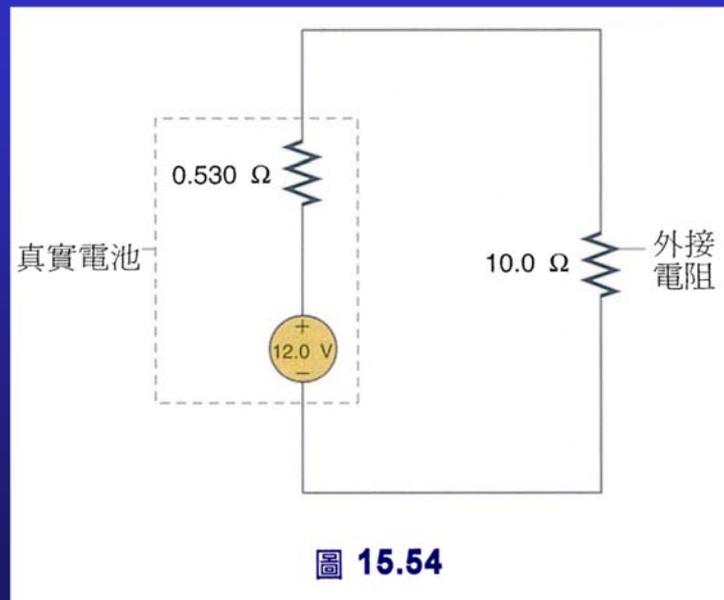


圖 15.53 將一個真實電池短路。請勿這樣做！

例題 15.10

一個真實的電池與 $10.0\ \Omega$ 的電阻串聯，如圖15.54。

- 計算線路中之電流。
- 計算電池二端之電位差。
- 計算電阻二端之電位差。
- 電池之內阻吸收的功率為何？



黃元正製作 Slide 63

解：

- 電流之方向如圖15.55所標示，用KVL順時方向迴路。

$$-12.0 + I(0.53) + I(10.0) = 0$$

$$\Rightarrow I = 1.14 \text{ (A)}$$

-

$$V_r = Ir = (1.14)(0.53) = 0.604 \text{ (V)}$$

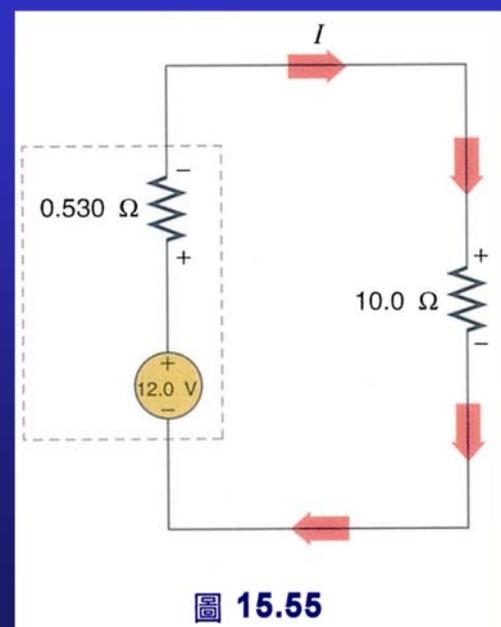
$$\Rightarrow V_{\text{term}} = 12.0 - 0.604 \\ = 11.4 \text{ (V)}$$

-

$$\Rightarrow V = IR = (1.14)(10.0) \\ = 11.4 \text{ (V)}$$

-

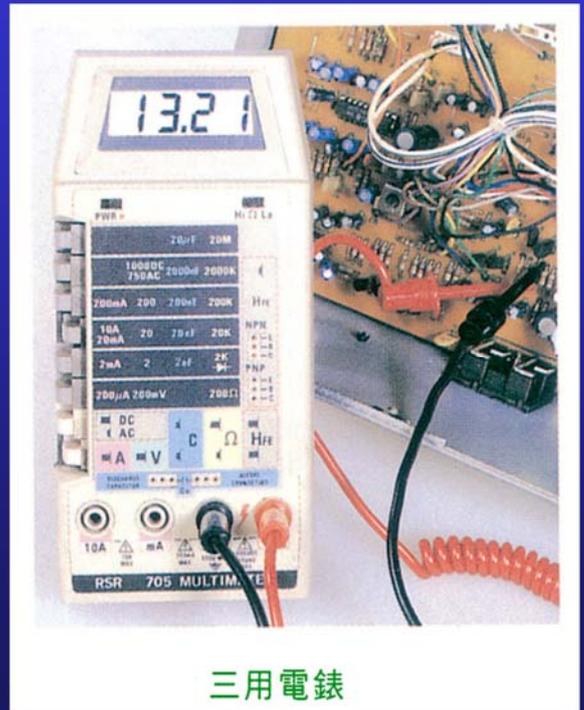
$$\Rightarrow P = I^2 r \\ = (1.14)^2 (0.53) \\ = 0.689 \text{ (W)}$$



黃元正製作 Slide 64

15.12 基本電子儀錶：伏特計、安培計與歐姆計

- 電路上電位差是用伏特計 (voltmeter)，電流是用安培計 (ammeter)，而電阻則是用歐姆計 (ohmmeter) 來量得。
- 往往這三種電儀表被設計成“三用電錶”。它具有伏特計、安培計，與歐姆計的功能，你可以依你的需要選擇你所要的功能。



黃元正製作 Slide 65

伏特計

- 伏特計是用來量測線路中任二端之電位差的儀錶。
- 伏特計特性：
 1. 它必須與線路之電子元件並聯。
 2. 它本身含一高電阻，所以它對線路的影響很小。

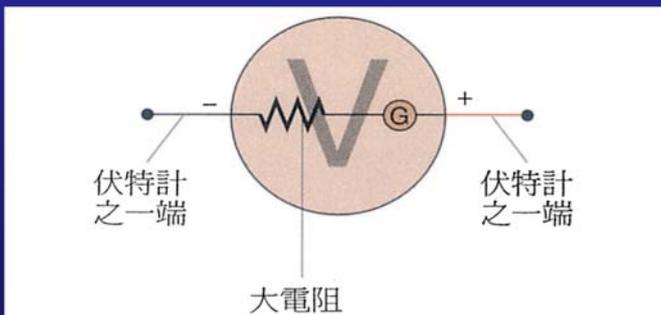


圖 15.57 伏特計內部接一個大的有效電阻

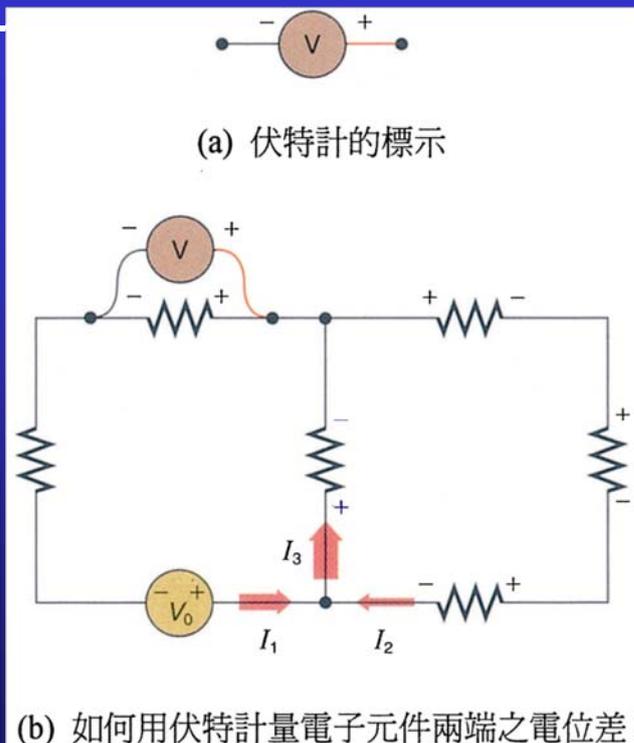


圖 15.56

黃元正製作 Slide 66

安培計

- 安培計是用來量測線路中各支路的電流大小。線路中以圖15.58來標示安培計。
- 安培計特性：
 1. 它必須與線路串聯。
 2. 它的有效電阻很小。

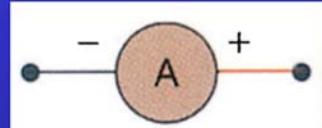


圖 15.58

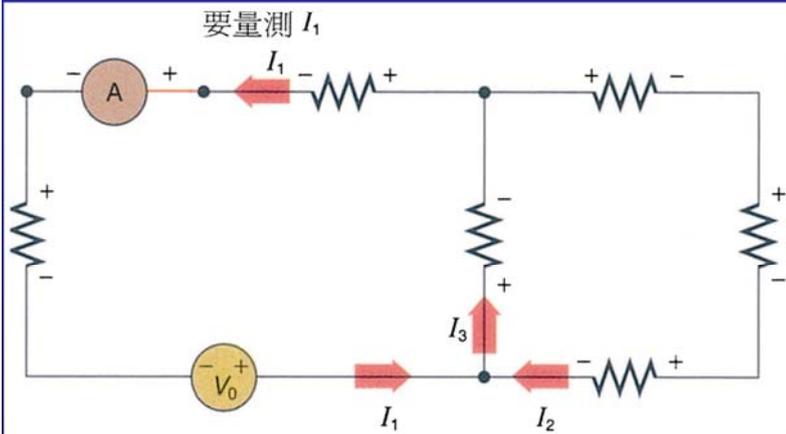
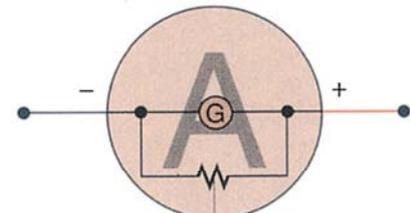


圖 15.59 安培計與要畫電流之線路串聯



小電阻

圖 15.60 安培計內部接一個小電阻

黃元正製作 Slide 67

歐姆計

- 歐姆計在線路中是以圖15.61來表示。其接法如圖15.62。
- 假如用歐姆計去量測線路中之電阻，如圖15.63時，則由歐姆計讀到的是其所接的二個端點的等效電阻而不是我們所要的電阻 R 。

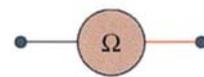


圖 15.61 表示歐姆計的符號

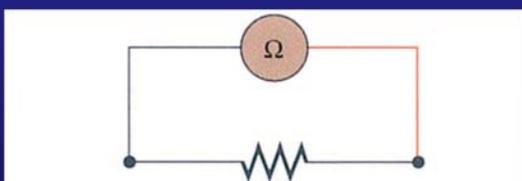


圖 15.62 如何利用歐姆計量電阻

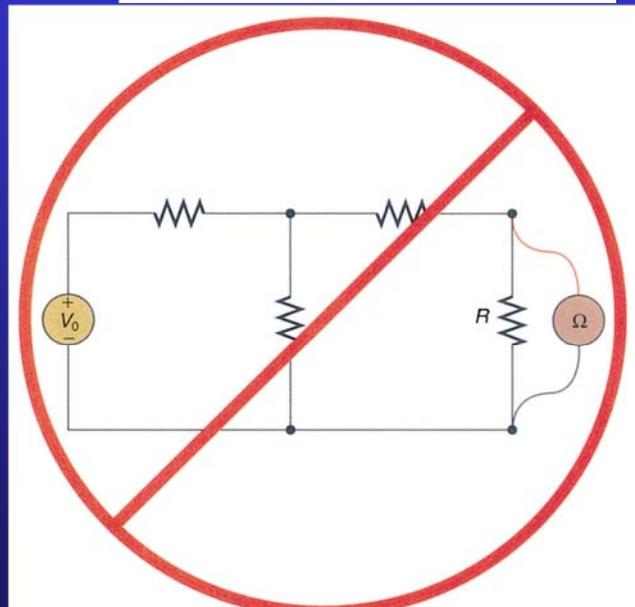


圖 15.63 量電阻的錯誤示範

黃元正製作 Slide 68

15.13 RC 電路

- 當你照相按下閃光燈按鈕時，往往要等一段時間，閃光燈才會亮。時間的延遲是因為電池在對電容器充電以貯存閃光燈發亮時所需的能量。
- 線路上的緩衝往往是出現在按上按鈕之後。另一個緩衝現象，可以圖 15.64 為例。圖 15.64 為 RC 線路，線路中我們裝上一個開關，以便探討各種現象。

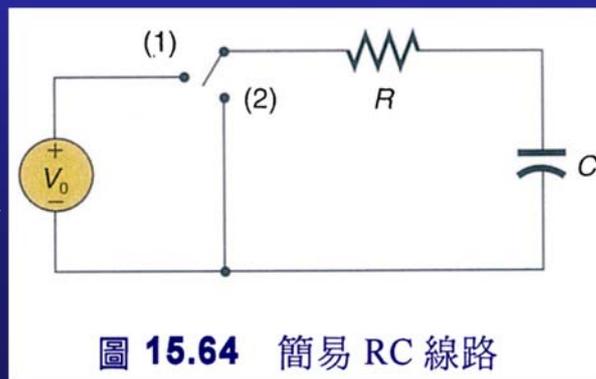


圖 15.64 簡易 RC 線路

黃元正製作 Slide 69

電容器充電

- 設時間 t ，流經線路的電流為 $I(t)$ ，如圖 15.65 所示。在電容器上的電荷為 $\pm q$ 。（其中 $q > 0$ ）

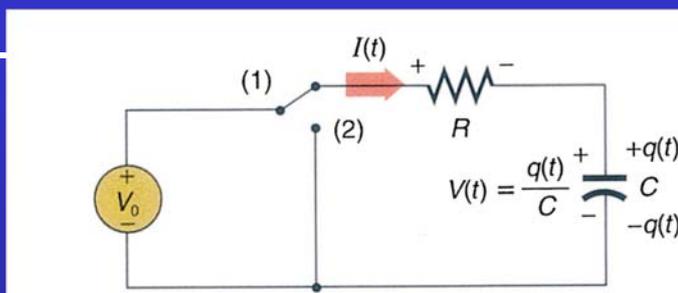


圖 15.65 當時間 $t = 0$ s 時，開關置於位置 (1)。

$$C = \frac{|q|}{|V|} \Rightarrow V = \frac{q}{C}$$

$$-V_0 + IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dq}{dt} \quad 0 + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0$$

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln I - \ln I_0 = -\frac{1}{RC} t$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-t/(RC)}$$

$$I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

黃元正製作 Slide 70

$$I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

- 我必須計算初始電流 I_0 。當開關被關上時，電容器並沒有電荷；電容器二端之電位差為零。再用一次 KVL 於線路

$$-V_0 + I_0 R + 0 = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)}$$

- 當時間 $t = RC$ ，電流為初始電流 I_0 的 e^{-1} 倍。此時間間隔稱為線路的时间常數 (time constant) τ 。
- 電容器在直流電路中一旦被充電，即如同斷路一般

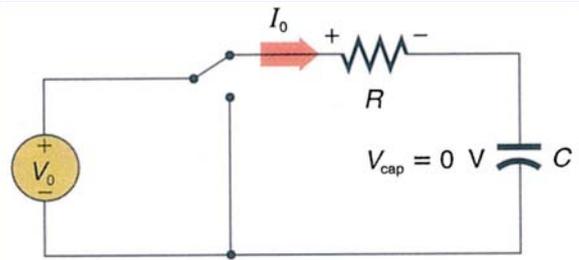


圖 15.66 當 $t = 0$ 時的狀況

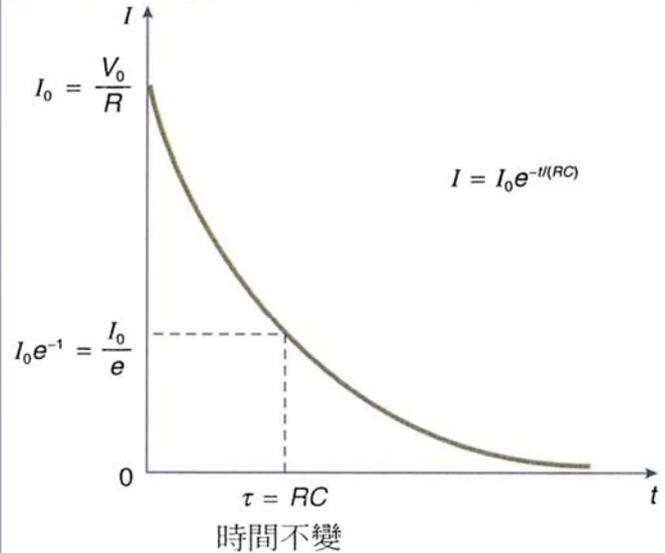


圖 15.67 電流隨時間變化的關係圖

- 電容器在充電的過程，其兩板的電荷亦是時間的函數。電荷 q 與時間 t 的關係可以由電流對時間積分得到。亦即

$$dq = Idt = \frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)} dt$$

$$\int_0^q dq = \frac{V_0}{R} \int_0^t e^{-t/(RC)} dt$$

$$q(t) = \frac{V_0}{R} [e^{-t/(RC)} - RC] \Big|_0^t$$

$$q(t) = V_0 C [1 - e^{-t/(RC)}]$$

$$t \rightarrow \infty \quad Q_0 \equiv V_0 C$$

$$q(t) = Q_0 [1 - e^{-t/(RC)}]$$

此對之作圖如圖 15.68。曲線在時間處之切線的斜率

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{\tau}$$

其中 τ 為 RC 線路之時間常數。

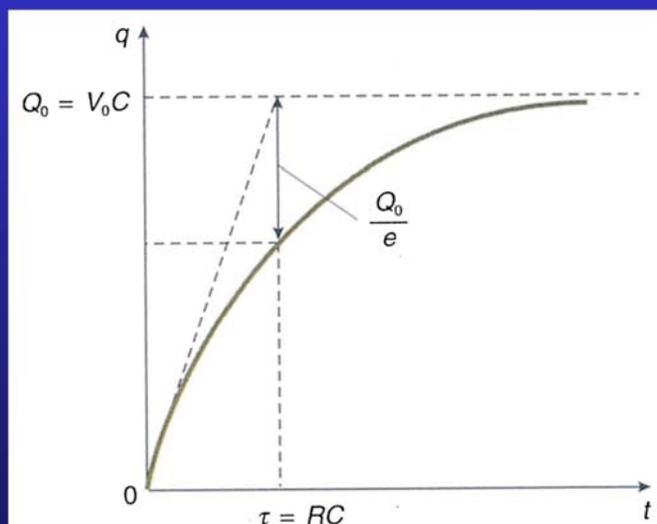


圖 15.68

$$q(t) = Q_0[1 - e^{-t/(RC)}]$$

- 在圖15.68，時間 $t = 0$ 之切線，在對應 $t = \tau$ 時之 q 坐標應為 Q_0 。而在時間常數 τ ，電容器上的電荷為

$$q(t = \tau) = Q_0(1 - e^{-1}) = 0.632Q_0$$

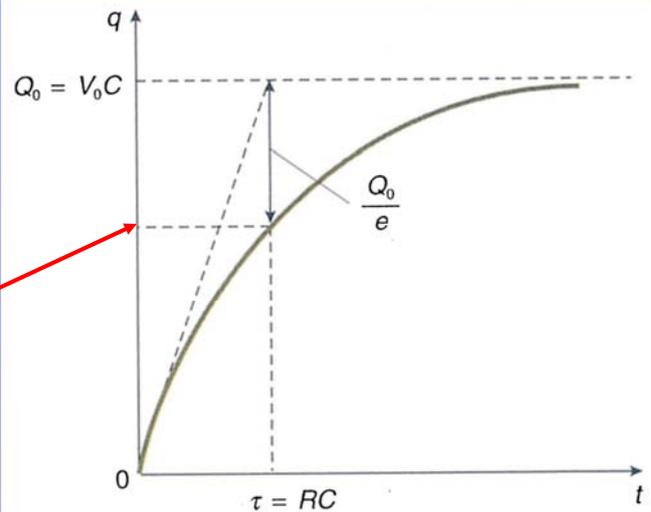


圖 15.68

例題 15.11

在圖15.67中，電流衰減至初始電流一半需時若干？

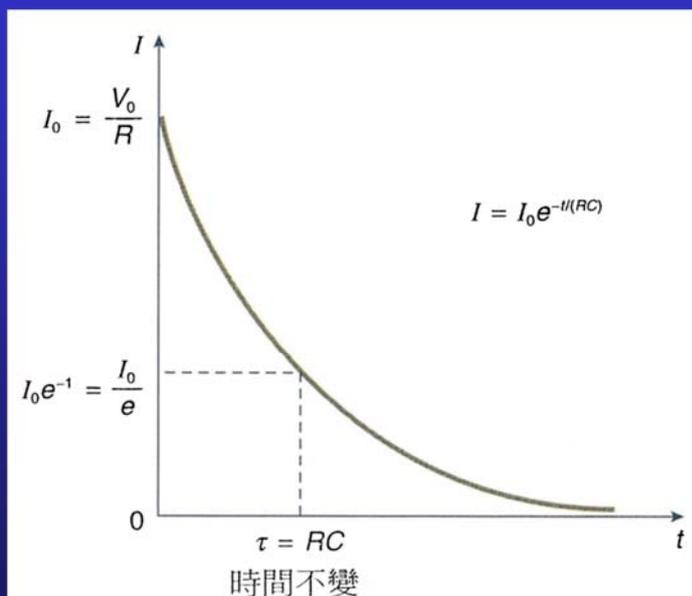


圖 15.67 電流隨時間變化的關係圖

解：

電流在RC線路中與時間的關係為 (15.35) 式：

$$I(t) = I_0 e^{-t/(RC)}$$

當電流為初始值之一半，上式變成

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-t/(RC)}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-t/(RC)}$$

左右兩邊積分，可得

$$\ln 1 - \ln 2 = \frac{-t}{RC}$$

可解得

$$t = RC \ln 2$$



$$t = 0.693\tau$$

黃元正製作 Slide 75

電容器放電1

- 假設我們線路圖15.69中之電流已降至零且電容器已充滿電。

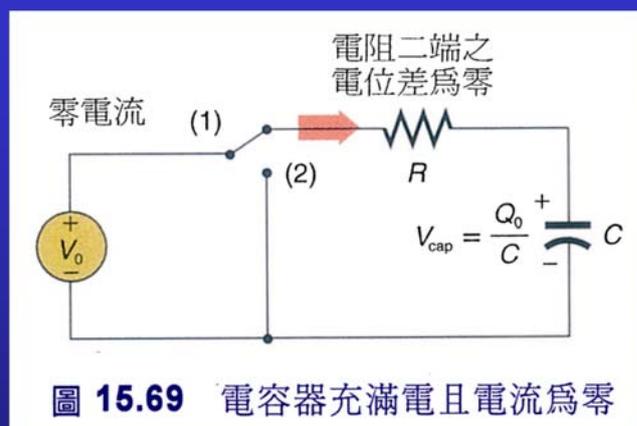
既然線路中沒有電流存在，根據歐姆定律，電阻二端之電位差為零：

$$V_{\text{res}} = IR = 0 \cdot R = 0$$

$$-V_0 + V_{\text{cap}} = 0$$



$$V_{\text{cap}} = V_0$$



在電容器兩端之電位差等於獨立電源兩端的電位差。

黃元正製作 Slide 76

電容器放電2

- 現在，我們打開線路，如圖15.70我們得到的是一個電子網路 (network)，而不是迴路。既然電容器被孤立，電容器就不可能放電，因沒有路徑提供給電容器上的電荷，讓電荷得以從一板移至另一板。
- 欲使電容器放電，我們必須把開關移至位置 (2)，如圖15.71，如此一來就形成迴路了。

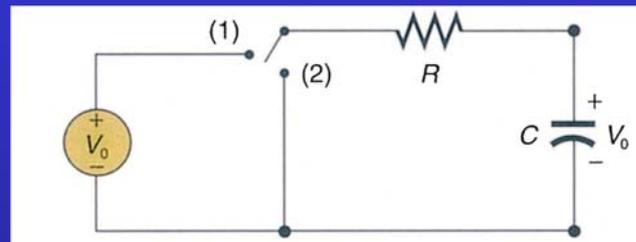


圖 15.70 開關被打開；沒有任何改變

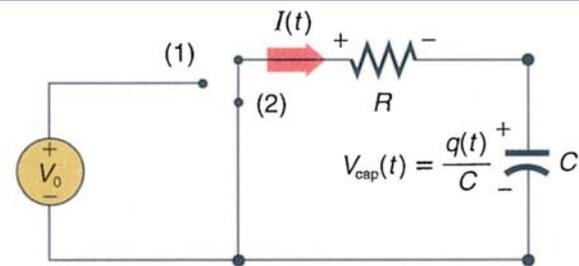


圖 15.71 若要放電，則將開關移至位置 (2)。

黃元正製作 Slide 77

- 我們再運用KVL於此迴路，即可得

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$IR + \frac{q}{C} = 0$$

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}q$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

$$\ln q - \ln Q_0 = \frac{-t}{RC}$$

$$q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

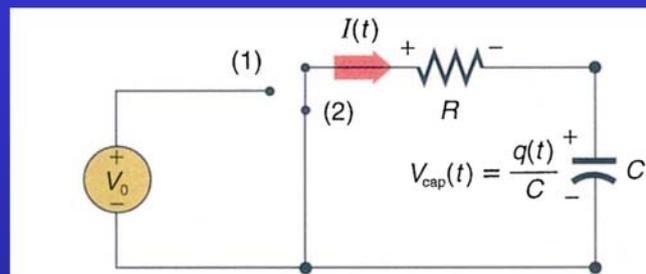


圖 15.71 若要放電，則將開關移至位置 (2)。

黃元正製作 Slide 78

$$q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

- 電容器上之初始電荷 Q_0 依電容定義為

$$C = \frac{Q_0}{V_0}$$



$$q(t) = CV_0 e^{-t/(RC)}$$

$$I = \frac{dq}{dt} = CV_0 e^{-t/(RC)} \left(\frac{-1}{RC} \right)$$



$$I(t) = -\frac{V_0}{R} e^{-t/(RC)}$$

式中之負號表示線路中電流實際上與圖15.71所標示反向。電流以指數遞減。而時間常數仍是 $\tau = RC$ 。經過時間 5τ 後，電流再次又可被忽略。

- 若線路中之電阻值非常小，小至如同以一導線接於電容器之二端；如此一來，時間常數甚小，而電容器在瞬間放電。這就如同我們將已充電之電容之二端短路一樣。

黃元正製作 Slide 79

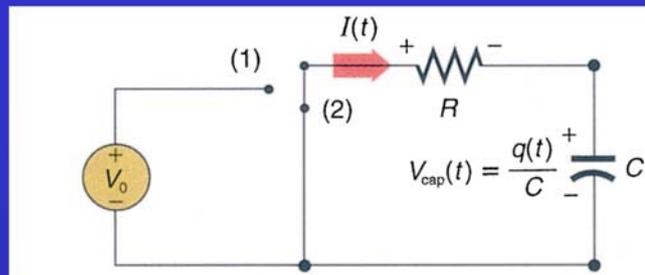


圖 15.71 若要放電，則將開關移至位置 (2)。

例題 15.12

在圖15.71 RC 線路中，電容器放電。試問經過多長時間，電容器上之電荷減為初始值的一半？

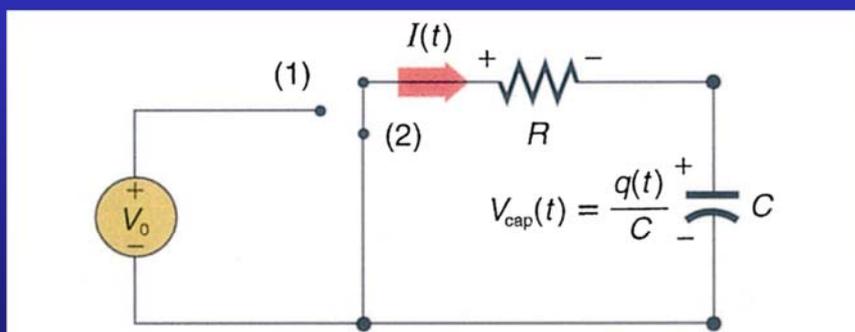


圖 15.71 若要放電，則將開關移至位置 (2)。

黃元正製作 Slide 80

解：

$$q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$$

$$t = RC$$

$$\rightarrow q(t) = Q_0 e^{-t/(RC)}$$

將 q 以初始值的1/2代入 (即 $q = Q_0 / 2$) ，即

$$\frac{Q_0}{2} = Q_0 e^{-t/\tau} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-t/\tau}$$

對兩邊取自然對數，得

$$-0.693 = e^{-t/\tau}$$

$$\rightarrow t = 0.693\tau$$